



绝密★启用前

天一教育

2024 年成人高等学校招生全国统一考试高起点

扫描二维码
获取视频和试题

数学(理工农医类)

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,满分 150 分,考试时间 120 分钟。

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第 I 卷(选择题,共 84 分)

得分	评卷人

一、选择题(本大题共 12 小题,每小题 7 分,共 84 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 样本数据 10,16,20,30 的平均数为 【 】

- A. 19 B. 20
C. 21 D. 22

2. 已知集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, 则 $A \cap B =$ 【 】

- A. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ B. $\{2, 4, 5\}$
C. $\{1, 2\}$ D. $\{2, 3\}$

3. 已知向量 $a = (4, 8)$, $b = (-1, 1)$, 则 $a - b =$ 【 】

- A. $(3, 7)$ B. $(5, 9)$
C. $(5, 7)$ D. $(3, 9)$

4. 下列函数中,在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是 【 】

- A. $y = 5^{-x}$ B. $y = \sqrt{x+5}$
C. $y = (x-5)^2$ D. $y = \log_{\frac{1}{5}}(x+1)$

5. 双曲线 $\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$ 的渐近线方程为 【 】

- A. $y = \pm x$ B. $y = \pm 2x$
C. $y = \pm 3x$ D. $y = \pm 4x$

6. 如果 $\ln x > \ln y > 0$, 那么 【 】

- A. $y < x < 1$ B. $x < y < 1$
C. $1 < x < y$ D. $1 < y < x$

7. 函数 $y = x^2 + 4x + 5$ 的图像的对称轴是 【 】

- A. $x = -2$ B. $x = -1$
C. $x = 0$ D. $x = 1$

8. 抛物线 $y^2 = 12x$ 的焦点坐标为 【 】

- A. $(0, 0)$ B. $(3, 0)$
C. $(-3, 0)$ D. $(1, 0)$

9. 不等式 $|x-1| < 7$ 的解集为 【 】

- A. $\{x | -10 < x < 0\}$ B. $\{x | -8 < x < 6\}$
C. $\{x | -6 < x < 8\}$ D. $\{x | 6 < x < 9\}$

10. 已知 $x \geq 0, y \geq 0$, 且 $x + y = 1$, 则 $x^2 + y^2$ 的最大值是 【 】

- A. 1 B. 2
C. 3 D. 4

11. 曲线 $y = \frac{4}{x}$ 与 $y = \ln x$ 交点的个数为 【 】

- A. 3 B. 2
C. 1 D. 0

12. 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列, 若 $a_3 > a_1$, 则 【 】

- A. $|a_2| > |a_1|$ B. $a_4 > a_2$
C. $|a_4| > |a_1|$ D. $a_5 > a_3$

第 II 卷(非选择题,共 66 分)

得分	评卷人

二、填空题(本大题共 3 小题,每小题 7 分,共 21 分)

13. $\sin 60^\circ =$ _____.

14. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = -1, a_4 = 8$, 则 $a_7 =$ _____.

15. 从甲、乙、丙 3 名学生中随机选 2 人, 则甲被选中的概率为 _____.

得 分	评卷人

三、解答题(本大题共 3 小题, 每小题 15 分, 共 45 分. 解答应写出推理、演算步骤)

16. (本小题满分 15 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 $a, b, c, a = 4, b = 5, c = 6$.

(I) 证明: $\triangle ABC$ 是锐角三角形;

(II) 求 $\triangle ABC$ 的面积.

17. (本小题满分 15 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(I) 求 C 的离心率;

(II) 设 O 为坐标原点, 点 A 在 C 上, 点 $B(t, 2)$, 且 $OA \perp OB, |AB| = 2\sqrt{2}$, 求 t .

18. (本小题满分 15 分)

已知函数 $f(x) = 3x^2 + a, g(x) = x^3 + bx, h(x) = f(x) + g(x)$.

(I) 若曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 在它们的公共点 $(1, c)$ 处有相同的切线, 求 a, b ;

(II) 若 $a = 1, b = -9$, 求 $h(x)$ 在区间 $[-5, 2]$ 上的最大值与最小值.

参考答案及解析

一、选择题

1. 【答案】 A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为平均数.

【应试指导】 平均数为 $\frac{10+16+20+30}{4} = 19$.

2. 【答案】 D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为集合的运算.

【应试指导】 $A \cap B = \{2, 3\}$.

3. 【答案】 C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为向量的减法.

【应试指导】 $a - b = (4 - (-1), 8 - 1) = (5, 7)$.

4. 【答案】 B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为函数的单调性.

【应试指导】 A 项, $y' = -\frac{1}{5^x} \ln 5$; B 项, $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+5}}$; C 项, $y' = 2(x-5)$; D 项, $y' = -\frac{1}{(x+1)\ln 5}$. 在 $(0, +\infty)$ 上, 只有 B 项的导数恒大于 0, 因此只有 B 项在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

5. 【答案】 B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为双曲线的渐近线.

【应试指导】 此双曲线的焦点在 y 轴上, $a = 2, b = 1$, 其渐近线方程为 $y = \pm \frac{a}{b}x = \pm 2x$.

6. 【答案】 D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为对数函数的单调性.

【应试指导】 因为 $f(x) = \ln x$ 为增函数, 所以 $\ln x > \ln y > 0 = \ln 1 \Rightarrow x > y > 1$.

7. 【答案】 A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为抛物线的对称轴方程.

【应试指导】 对称轴方程为 $x = -\frac{b}{2a} = -2$.

8. 【答案】 B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为抛物线的焦点公式.

【应试指导】 抛物线 $y^2 = 12x = 2px$, 得 $p = 6$, 所以焦点坐标为 $(\frac{p}{2}, 0) = (3, 0)$.

9. 【答案】 C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为绝对值不等式.

【应试指导】 $|x-1| < 7 \Rightarrow -7 < x-1 < 7 \Rightarrow -6 < x < 8$, 所以不等式的解集为 $\{x | -6 < x < 8\}$.

10.【答案】 A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为求函数的最值.

【应试指导】 $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 1 - 2xy \leq 1 (x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow 2xy \geq 0)$, 故 $x^2 + y^2$ 的最大值为 1.

11.【答案】 C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为反比例函数和对数函数的图像.

【应试指导】 由反比例函数和对数函数的图像可知, 两个函数仅在第一象限有一个交点.

12.【答案】 D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为等比数列的性质.

【应试指导】 $a_3 > a_1 \Rightarrow a_1 q^2 > a_1$, 而 $q \neq 0$, 故 $a_1 q^2 \cdot q^2 > a_1 \cdot q^2$, 即 $a_5 > a_3$.

二、填空题

13.【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为三角函数值.

【应试指导】 $\sin 60^\circ = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

14.【答案】 17

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为等差数列.

【应试指导】 $a_4 = a_1 + 3d$, 即 $8 = -1 + 3d$, 得 $d = 3$, 所以 $a_7 = a_1 + 6d = 17$.

15.【答案】 $\frac{2}{3}$

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为古典概型及其概率计算公式.

【应试指导】 甲被选中的概率为 $\frac{C_1^1 \cdot C_2^1}{C_3^3} = \frac{2}{3}$.

三、解答题

16. (I) 因为三角形三边长分别是 $a = 4, b = 5, c = 6$, 可得 $a < b < c$.

因此, 三角形三个角满足 $A < B < C$, C 为最大角.

$$\text{又 } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{16 + 25 - 36}{2 \times 4 \times 5} = \frac{1}{8},$$

得 $\cos C > 0$, 而 $C \in (0, \pi)$, 故 C 为锐角,

从而 A, B 均为锐角,

所以 $\triangle ABC$ 是锐角三角形.

$$(II) \text{ 由 (I) 知 } \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{3\sqrt{7}}{8},$$

则由面积公式, $\triangle ABC$ 的面积

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

$$= \frac{15\sqrt{7}}{4}.$$

17. (I) 由题意知, $a = 2, b = \sqrt{2}, c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{2}$,

$$\text{故离心率 } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(II) 设点 A 的坐标为 (x_0, y_0) , 则直线 $|AB| = \sqrt{(x_0 - t)^2 + (y_0 - 2)^2} = 2\sqrt{2}$, ①

在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中, $|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 = x_0^2 + y_0^2 + t^2 + 2^2 = 8$, ②

点 A 在椭圆上, 得 $\frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{2} = 1$, ③

联立 ①②③, 可解得 $t = 0, x_0 = \pm 2, y_0 = 0$.

18. (I) $f'(x) = 6x, g'(x) = 3x^2 + b$,

由题意知, $f(1) = g(1), f'(1) = g'(1)$,

故 $3 + a = 1 + b$, 且 $6 = 3 + b$,

解得 $b = 3, a = 1$.

(II) $\because a = 1, b = -9$,

$$\therefore f(x) = 3x^2 + 1, g(x) = x^3 - 9x,$$

$$\therefore h(x) = f(x) + g(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1,$$

$$\text{则 } h'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x+3)(x-1).$$

令 $h'(x) = 0$, 得驻点 $x_1 = -3, x_2 = 1$.

而 $h(-5) = -4, h(-3) = 28, h(1) = -4, h(2) = 3$,

故 $h(x)$ 在 $[-5, 2]$ 上的最大值为 28, 最小值为 -4.



绝密★启用前

2023 年成人高等学校招生全国统一考试高起点

数学(理工农医类)



扫描二维码
获取视频和试题

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,满分 150 分,考试时间 120 分钟。

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第 I 卷(选择题,共 85 分)

得分	评卷人

一、选择题(本大题共 17 小题,每小题 5 分,共 85 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

- 函数 $y = -x^2 + 2x$ 的值域是 【 】
A. $[0, +\infty)$ B. $[1, +\infty)$
C. $(-\infty, 1]$ D. $(-\infty, 0)$
- 一批产品共有 5 件,其中 4 件为正品,1 件为次品,从中一次取出 2 件均为正品的概率为 【 】
A. 0.6 B. 0.5
C. 0.4 D. 0.3
- 函数 $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ 的定义域为 【 】
A. $\mathbf{R}$ B. $\{1\}$
C. $\{x \mid |x| \leq 1\}$ D. $\{x \mid |x| \geq 1\}$
- 若 $x < y < 0$,则 【 】
A. $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$ B. $\frac{x}{y} < \frac{y}{x}$
C. $\frac{x+y}{2} > \sqrt{xy}$ D. $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} > 2$
- 一个袋子中装有标号分别为 1,2,3,4 的四个球,采用有放回的方式从袋中摸球两次,每次摸出一个球,则恰有一次摸出 2 号球的概率为 【 】
A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{4}$
C. $\frac{3}{8}$ D. $\frac{1}{2}$
- 下列函数中,为增函数的是 【 】
A. $y = x^3$ B. $y = x^2$
C. $y = -x^2$ D. $y = -x^3$

- 已知点 $M(1,2), N(2,3)$,则直线 MN 的斜率为 【 】
A. $\frac{5}{3}$ B. 1
C. -1 D. $-\frac{5}{3}$
- 如果点 $A(1,1)$ 和 $B(2,4)$ 关于直线 $y = kx + b$ 对称,则 $k =$ 【 】
A. -3 B. $-\frac{1}{3}$
C. $\frac{1}{3}$ D. 3
- 若向量 $a = (1, -1), b = (1, x)$,且 $|a + b| = 2$,则 $x =$ 【 】
A. -4 B. -1
C. 1 D. 4
- 设 $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$,则 $\sqrt{1 - 2\sin\alpha\cos\alpha} =$ 【 】
A. $\sin\alpha + \cos\alpha$ B. $-\sin\alpha - \cos\alpha$
C. $\sin\alpha - \cos\alpha$ D. $\cos\alpha - \sin\alpha$
- 设 $f(x) = x^3 + ax^2 + x$ 为奇函数,则 $a =$ 【 】
A. 1 B. 0
C. -1 D. -2
- 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = 1$,公比 $q = 2$,则 $a_5 =$ 【 】
A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{4}$
C. 4 D. 8
- 设集合 $M = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 = 1\}, N = \{x \in \mathbf{R} \mid x^3 = 1\}$,则 $M \cap N =$ 【 】
A. $\{1\}$ B. $\{-1\}$
C. $\{-1, 1\}$ D. $\emptyset$
- 函数 $y = \sin(x + 11)$ 的最大值是 【 】
A. 11 B. 1
C. -1 D. -11
- 设 α 是第一象限角, $\sin\alpha = \frac{1}{3}$,则 $\sin 2\alpha =$ 【 】
A. $\frac{4}{9}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$
C. $\frac{4\sqrt{2}}{9}$ D. $\frac{2}{3}$
- 设 $\log_2 x = a$,则 $\log_2(2x^2) =$ 【 】
A. $2a^2 + 1$ B. $2a^2 - 1$
C. $2a - 1$ D. $2a + 1$

17. 设甲: $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 乙: $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 则

- A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件
- B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件
- C. 甲是乙的充要条件
- D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

第 II 卷 (非选择题, 共 65 分)

得 分	评卷人

二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分)

18. 过点 $(2, 0)$ 作圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的切线, 切点的横坐标为_____.

19. 曲线 $y = \frac{1}{x^2}$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程是_____.

20. 函数 $y = -x^2 + ax$ 图像的对称轴为 $x = 2$, 则 $a =$ _____.

21. 九个学生期末考试的成绩分别为

79 63 88 94 99 77 89 81 85

这九个学生成绩的中位数为_____.

得 分	评卷人

三、解答题 (本大题共 4 小题, 共 49 分. 解答应写出推理、演算步骤)

22. (本小题满分 12 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $B = 60^\circ, b^2 = ac$, 求 A .

23. (本小题满分 12 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_3 + a_5 = 6, a_2 + a_4 + a_6 = 12$, 求 $\{a_n\}$ 的首项与公差.

24. (本小题满分 12 分)

已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点到准线的距离为 1.

(I) 求 C 的方程;

(II) 若 $A(1, m) (m > 0)$ 为 C 上一点, O 为坐标原点, 求 C 上另一点 B 的坐标, 使得 $OA \perp OB$.

25. (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = (x - 4)(x^2 - a)$.

(I) 求 $f'(x)$;

(II) 若 $f'(-1) = 8$, 求 $f(x)$ 在区间 $[0, 4]$ 的最大值与最小值.

参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】 C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为函数的值域.

【应试指导】 $y = -x^2 + 2x = 1 - (x-1)^2 \leq 1$, 故原函数的值域为 $(-\infty, 1]$.

2.【答案】 A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为随机事件的概率.

【应试指导】 一次取出 2 件均为正品的概率为 $P = \frac{C_4^2}{C_9^2} = \frac{3}{5} = 0.6$.

3.【答案】 A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为函数的定义域.

【应试指导】 对于 $f(x) = \sqrt[3]{x^2-1}$, 奇次根号下无要求, 故函数的定义域为 $\mathbf{R}$.

4.【答案】 D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为不等式的性质.

【应试指导】 因为 $x < y < 0$, 故 $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} > 2\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y}} = 2$.

5.【答案】 C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为独立重复试验的概率.

【应试指导】 所求概率为 $P = C_2^1 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$.

6.【答案】 A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为函数的单调性.

【应试指导】 对于 $y = x^3, y' = 3x^2 \geq 0$, 故 $y = x^3$ 为增函数.

7.【答案】 B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为直线的斜率.

【应试指导】 直线 MN 的斜率为 $\frac{3-2}{2-1} = 1$.

8.【答案】 B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为两垂直直线斜率的关系.

【应试指导】 直线 AB 的斜率为 $\frac{4-1}{2-1} = 3$, 点 A, B 关于直线 $y = kx + b$ 对称, 因此直线 AB 与其垂直, 故 $3k = -1$, 得

$$k = -\frac{1}{3}.$$

9.【答案】 C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为向量的加法和模.

【应试指导】 $a + b = (2, x-1)$, 所以 $|a + b| = \sqrt{2^2 + (x-1)^2} = 2$, 解得 $x = 1$.

10.【答案】 D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为三角函数的运算.

【应试指导】 当 $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ 时, $\cos \alpha > \sin \alpha > 0$, 所以 $\sqrt{1-2\sin \alpha \cos \alpha} = \sqrt{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2} = |\sin \alpha - \cos \alpha| = \cos \alpha - \sin \alpha$.

11.【答案】 B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为函数的奇偶性.

【应试指导】 因为 $f(x)$ 为奇函数, 故 $f(-x) = -f(x)$. 即 $-x^3 + ax^2 - x = -x^3 - ax^2 - x$, 得 $2ax^2 = 0$, 则 $a = 0$.

12.【答案】 D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为等比数列.

【应试指导】 $a_5 = a_2 q^3 = 2^3 = 8$.

13.【答案】 A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为集合的运算.

【应试指导】 由题意 $M = \{-1, 1\}, N = \{1\}$, 所以 $M \cap N = \{1\}$.

14.【答案】 B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为三角函数的值域.

【应试指导】 因为 $-1 \leq \sin(ax + \varphi) \leq 1$, 所以 $-1 \leq \sin(x + 11) \leq 1$, 故 $y = \sin(x + 11)$ 的最大值为 1.

15.【答案】 C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为三角函数的二倍角公式.

【应试指导】 α 在第一象限, 则 $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$.

16.【答案】 D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为对数函数的性质.

【应试指导】 $\log_2(2x^2) = \log_2 2 + \log_2 x^2 = 1 + 2\log_2 x = 1 + 2a$.

17.【答案】 D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为简易逻辑.

【应试指导】 由于 $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 且 $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 故甲既不是乙的充分条件, 也不是乙的必要条件.

二、填空题

18.【答案】 $\frac{1}{2}$

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为圆的切线.

【应试指导】 设切点 (x_0, y_0) , 则有 $\frac{y_0}{x_0} \cdot \frac{y_0}{x_0 - 2} = -1$, 即 $y_0^2 + x_0^2 - 2x_0 = 0$, 又 $y_0^2 + x_0^2 = 1$, 所以 $x_0 = \frac{1}{2}$, 故切

点的横坐标为 $\frac{1}{2}$.

19.【答案】 $2x + y - 3 = 0$

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为切线方程.

【应试指导】 由题意, 该切线斜率 $k = \left(\frac{1}{x^2}\right)' \Big|_{x=1} = -2$, 又过点 $(1, 1)$, 所以切线方程为 $y - 1 = -2(x - 1)$. 即

$2x + y - 3 = 0$.

20.【答案】 4

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为二次函数的性质.

【应试指导】 由题意, 该函数图像的对称轴为 $x = -\frac{a}{-2} = \frac{a}{2} = 2$, 得 $a = 4$.

21.【答案】 85

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为中位数.

【应试指导】 将成绩按由小到大排列: 63, 77, 79, 81, 85, 88, 89, 94, 99. 因此中位数为 85.

三、解答题

22. 由余弦定理 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$, 可得 $ac = a^2 + c^2 - ac$,

即 $a^2 + c^2 - 2ac = (a - c)^2 = 0$, 解得 $a = c$.

又因为 $B = 60^\circ$, 故 $\triangle ABC$ 为等边三角形, 所以 $A = 60^\circ$.

23. 因为 $\{a_n\}$ 为等差数列, 则 $\begin{cases} a_1 + a_3 + a_5 = 3a_1 + 6d = 6, \\ a_2 + a_4 + a_6 = 3a_1 + 9d = 12, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a_1 = -2, \\ d = 2. \end{cases}$

24. (I) 由题意, 该抛物线的焦点到准线的距离为 $\frac{p}{2} - \left(-\frac{p}{2}\right) = p = 1$,

所以抛物线 C 的方程为 $y^2 = 2x$.

(II) 因 $A(1, m)$ ($m > 0$) 为 C 上一点, 故有 $m^2 = 2$,

可得 $m = \sqrt{2}$, 因此 A 点坐标为 $(1, \sqrt{2})$.

设 B 点坐标为 $(x_0, -\sqrt{2x_0})$, 则 $k_{OA} = \sqrt{2}$, $k_{OB} = \frac{-\sqrt{2x_0}}{x_0}$.

因为 $OA \perp OB$, 则有 $k_{OA} \cdot k_{OB} = -1$.

即 $\sqrt{2} \cdot \frac{-\sqrt{2x_0}}{x_0} = -1$, 解得 $x_0 = 4$.

所以 B 点的坐标为 $(4, -2\sqrt{2})$.

25. (I) $f'(x) = (x-4)'(x^2-a) + (x-4)(x^2-a)'$

$= x^2 - a + 2x(x-4)$

$= 3x^2 - 8x - a$.

(II) 由于 $f'(-1) = 3 + 8 - a = 8$, 得 $a = 3$.

令 $f'(x) = 3x^2 - 8x - 3 = 0$,

解得 $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{1}{3}$ (舍去).

又 $f(0) = 12$, $f(3) = -6$, $f(4) = 0$.

所以在区间 $[0, 4]$ 上函数最大值为 12, 最小值为 -6.



绝密★启用前

2022 年成人高等学校招生全国统一考试高起点

数学(理工农医类)

扫描二维码
获取视频和试题

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,满分 150 分,考试时间 120 分钟。

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第 I 卷(选择题,共 85 分)

得分	评卷人

一、选择题(本大题共 17 小题,每小题 5 分,共 85 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 设集合 $M = \{x \mid |x-2| < 1\}$, $N = \{x \mid x > 2\}$, 则 $M \cap N =$ 【 】
 A. $\{x \mid 1 < x < 3\}$ B. $\{x \mid x > 2\}$
 C. $\{x \mid 2 < x < 3\}$ D. $\{x \mid 1 < x < 2\}$
2. 设函数 $f(x) = x^2 - 1$, 则 $f(x+1) =$ 【 】
 A. $x^2 + 2x + 1$ B. $x^2 + 2x$
 C. $x^2 + 1$ D. x^2
3. 函数 $y = \lg(x^2 - 4x + 3)$ 的定义域是 【 】
 A. $\{x \mid -3 < x < -1\}$ B. $\{x \mid x < -3 \text{ 或 } x > -1\}$
 C. $\{x \mid 1 < x < 3\}$ D. $\{x \mid x < 1 \text{ 或 } x > 3\}$
4. 下列函数中,为奇函数的是 【 】
 A. $y = \cos^2 x$ B. $y = \sin x$
 C. $y = 2^{-x}$ D. $y = x + 1$
5. 下列函数中,为减函数的是 【 】
 A. $y = \cos x$ B. $y = 3^x$
 C. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ D. $y = 3x^2 - 1$
6. 设 α 是第三象限角,若 $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $\sin \alpha =$ 【 】
 A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{1}{2}$
 C. $-\frac{1}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

7. 函数 $y = x^2 + 1 (x \leq 0)$ 的反函数是 【 】
 A. $y = -\sqrt{x-1} (x \geq 1)$ B. $y = \sqrt{x-1} (x \geq 1)$
 C. $y = \sqrt{x} - 1 (x \geq 0)$ D. $y = -\sqrt{x} - 1 (x \geq 0)$
8. 过点 $(-2, 2)$ 与直线 $x + 3y - 5 = 0$ 平行的直线是 【 】
 A. $x + 3y - 4 = 0$ B. $3x + y + 4 = 0$
 C. $x + 3y + 8 = 0$ D. $3x - y + 8 = 0$
9. 已知 $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{5}$, 则 $\sin 2\alpha =$ 【 】
 A. $-\frac{24}{25}$ B. $-\frac{7}{25}$
 C. $\frac{7}{25}$ D. $\frac{24}{25}$
10. 设甲: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$; 乙: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. 则 【 】
 A. 甲是乙的必要条件但不是充分条件
 B. 甲是乙的充分条件但不是必要条件
 C. 甲是乙的充要条件
 D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件
11. 已知空间向量 i, j, k 为两两垂直的单位向量, 向量 $a = 2i + 3j + mk$, 若 $|a| = \sqrt{13}$, 则 $m =$ 【 】
 A. -2 B. -1
 C. 0 D. 1
12. $(2 - 3i)^2 =$ 【 】
 A. $13 - 6i$ B. $13 - 12i$
 C. $-5 - 6i$ D. $-5 - 12i$
13. 中心在坐标原点, 对称轴为坐标轴, 且一个顶点为 $(3, 0)$, 虚轴长为 8 的双曲线的方程是 【 】
 A. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$ B. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$
 C. $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{9} = 1$ D. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{64} = 1$
14. $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^5$ 的展开式中, x^2 的系数为 【 】
 A. 20 B. 10
 C. 5 D. 1
15. 已知直线 $l: 3x - 2y - 5 = 0$, 圆 $C: (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$, 则 C 上到 l 的距离为 1 的点共有 【 】
 A. 1 个 B. 2 个
 C. 3 个 D. 4 个

16. 袋中有 6 个球, 其中 4 个红球, 2 个白球, 从中随机取出 2 个球, 则其中恰有 1 个红球的概率为

{ }

- A. $\frac{8}{15}$ B. $\frac{4}{15}$
C. $\frac{2}{15}$ D. $\frac{1}{15}$

17. 给出下列两个命题:

- ① 如果一条直线与一个平面垂直,则该直线与该平面内的任意一条直线垂直
- ② 以二面角的棱上任意一点为端点,在二面角的两个面内分别作射线,则这两条射线所成的角为该二面角的平面角

则

【

- A. ①② 都为真命题
B. ① 为真命题, ② 为假命题
C. ① 为假命题, ② 为真命题
D. ①② 都为假命题

第 II 卷 (非选择题, 共 65 分)

得 分	评卷人

二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 4 分,共 16 分)

18. 点(4,5)关于直线 $y = x$ 的对称点的坐标为_____.

19. 长方体的长、宽、高分别为 2, 3, 6, 则该长方体的对角线长为_____.

20. 某校学生参加一次科技知识竞赛,抽取了其中 8 位同学的分数作为样本,数据如下:

90, 90, 75, 70, 80, 75, 85, 75.

则该样本的平均数为_____.

21. 设函数 $f(x) = x \sin x$, 则 $f'(x) =$.

得 分	评卷人

三、解答题(本大题共 4 小题,共 49 分.解答应写出推理、演算步骤)

22. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, $B = 120^\circ$, $BC = 4$, $\triangle ABC$ 的面积为 $4\sqrt{3}$, 求 AC .

23. (本小题满分 12 分)

已知 a, b, c 成等差数列, $a, b, c+1$ 成等比数列. 若 $b=6$, 求 a 和 c .

24. (本小题满分 12 分)

已知直线 l 的斜率为 1, l 过抛物线 $C: x^2 = \frac{1}{2}y$ 的焦点, 且与 C 交于 A, B 两点.

(I) 求 l 与 C 的准线的交点坐标;

(II) 求 $|AB|$.

25. (本小题满分 13 分)

设函数 $f(x) = x \ln x + x$.

(I) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(II) 求 $f(x)$ 的极值.

参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】 C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为集合的运算.

【应试指导】 解得 $M = \{x \mid |x-2| < 1\} = \{x \mid -1 < x-2 < 1\} = \{x \mid 1 < x < 3\}$, 故 $M \cap N = \{x \mid 2 < x < 3\}$.

2.【答案】 B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为函数的性质.

【应试指导】 $f(x+1) = (x+1)^2 - 1 = x^2 + 2x + 1 - 1 = x^2 + 2x$.

3.【答案】 D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为对数函数的性质.

【应试指导】 由对数函数的性质可知 $x^2 - 4x + 3 > 0$, 解得 $x > 3$ 或 $x < 1$, 故函数的定义域为 $\{x \mid x < 1$ 或 $x > 3\}$.

4.【答案】 B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为函数的奇偶性.

【应试指导】 当 $f(-x) = -f(x)$ 时, 函数 $f(x)$ 是奇函数, 四个选项中只有选项 B 符合, 故选 B 选项.

5.【答案】 C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为减函数.

【应试指导】 由对数函数的性质可知, 当底数大于 0 小于 1 时, 在定义域内, 对数函数为减函数, 故选 C 选项.

6.【答案】 D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为三角函数的计算.

【应试指导】 由于 $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$, 而 α 为第三象限角, 故 $\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

7.【答案】 A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为反函数.

【应试指导】 $y = x^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow x^2 = y - 1$, 由于 $x \leq 0$, 故 $x = -\sqrt{y-1}$, 把 x 与 y 互换, 得所求反函数为

$y = -\sqrt{x-1} (x \geq 1)$.

8.【答案】 A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为直线方程.

【应试指导】 所求直线与 $x+3y-5=0$ 平行, 可设所求直线为 $x+3y+c=0$, 将点 $(-2, 2)$ 代入直线方程, 故 $-2+3 \times 2+c=0$, 解得 $c=-4$, 因此所求直线为 $x+3y-4=0$.

9.【答案】 D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为倍角公式.

【应试指导】 $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{5}$ 两边平方得 $\sin^2 \alpha - 2\sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{1}{25} \Rightarrow 1 - \sin 2\alpha = \frac{1}{25}$, 故 $\sin 2\alpha = \frac{24}{25}$.

10.【答案】 A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为简易逻辑.

【应试指导】 三角形相似不一定全等, 但三角形全等一定相似, 因此, 甲是乙的必要条件但不是充分条件.

11.【答案】 C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为空间向量的计算.

【应试指导】 由题可知向量 $a = (2, 3, m)$, 故 $|a| = \sqrt{2^2 + 3^2 + m^2} = \sqrt{13 + m^2} = \sqrt{13}$, 解得 $m = 0$.

12.【答案】 D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为复数的计算.

【应试指导】 $(2-3i)^2 = 4-12i+9i^2 = 4-9-12i = -5-12i$.

13.【答案】 B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为双曲线的性质.

【应试指导】 双曲线有一个顶点为 $(3, 0)$, 因此所求双曲线的实轴在 x 轴上, 可排除 A、C 选项, 又由于虚轴长为 8, 故 $b = 4$, 即 $b^2 = 16$, 故双曲线方程为 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

14.【答案】 C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为二项式定理.

【应试指导】 二项展开式的第二项为 $C_5^1 x^4 \cdot \frac{1}{x^2} = 5x^2$, 故展开式中 x^2 的系数为 5.

15.【答案】 D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为直线与圆的位置关系.

【应试指导】 由题可知圆的圆心为 $(1, -1)$,半径为2,圆心到直线的距离为 $\frac{|3 \times 1 - 2 \times (-1) - 5|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = 0$,即

直线过圆心,因此圆C上到直线的距离为1的点共有4个.

16.【答案】 A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为随机事件的概率.

【应试指导】 恰有1个红球的概率为 $\frac{C_4^1 C_5^1}{C_6^2} = \frac{4 \times 2}{\frac{6 \times 5}{2}} = \frac{8}{15}$.

17.【答案】 B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为直线与平面的位置关系.

【应试指导】 一条直线与平面垂直,则直线与平面内的任意一条直线垂直,故①为真命题;二面角的两条射线必须垂直于二面角的棱,故②为假命题,因此选B选项.

二、填空题

18.【答案】 $(5, 4)$

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为对称坐标.

【应试指导】 点 $(4, 5)$ 关于直线 $y = x$ 的对称点为 $(5, 4)$.

19.【答案】 7

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为立方体.

【应试指导】 由题可知长方体的底面的对角线长为 $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$,则在由高、底面对角线、长方体的对角线组成的三角形中,长方体的对角线长为 $\sqrt{13 + 6^2} = \sqrt{49} = 7$.

20.【答案】 80

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为样本平均数.

【应试指导】 样本平均数为 $\frac{90 + 90 + 75 + 70 + 80 + 75 + 85 + 75}{8} = 80$.

21.【答案】 $\sin x + x \cos x$

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为导数的运算.

【应试指导】 $f'(x) = (x \sin x)' = \sin x + x \cos x$.

三、解答题

22. 由 $\triangle ABC$ 的面积为 $4\sqrt{3}$ 得 $\frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin 120^\circ = 4\sqrt{3}$.

所以 $AB = 4$.

因此 $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos 120^\circ = 48$.

所以 $AC = 4\sqrt{3}$.

23. 由已知得 $\begin{cases} a + c = 12, \\ a(c + 1) = 36. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a = 4, \\ c = 8, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a = 9, \\ c = 3. \end{cases}$

24. (I) C的焦点为 $(0, \frac{1}{8})$,准线为 $y = -\frac{1}{8}$.

由题意得 l 的方程为 $y = x + \frac{1}{8}$.

因此 l 与C的准线的交点坐标为 $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{8})$.

(II) 由 $\begin{cases} y = x + \frac{1}{8}, \\ y = 2x^2, \end{cases}$ 得 $2x^2 - x - \frac{1}{8} = 0$.

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,则 $x_1 + x_2 = \frac{1}{2}, y_1 + y_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

因此 $|AB| = y_1 + y_2 + \frac{1}{4} = 1$.

25. (I) $f(1) = 1, f'(x) = 2 + \ln x$,故 $f'(1) = 2$.

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = 2x - 1$.

(II) 令 $f'(x) = 0$,解得 $x = e^{-2}$.

当 $0 < x < e^{-2}$ 时, $f'(x) < 0$;当 $x > e^{-2}$ 时, $f'(x) > 0$.

故 $f(x)$ 在区间 $(0, e^{-2})$ 单调递减,在区间 $(e^{-2}, +\infty)$ 单调递增.

因此 $f(x)$ 在 $x = e^{-2}$ 时取得极小值 $f(e^{-2}) = -e^{-2}$.



绝密★启用前

2021 年成人高等学校招生全国统一考试高起点

数学(理工农医类)

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,满分 150 分,考试时间 120 分钟。

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第 I 卷(选择题,共 85 分)

得分	评卷人

一、选择题(本大题共 17 小题,每小题 5 分,共 85 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

- 若集合 $A = \{x | -1 \leq x < 5\}$, $B = \{x | -2 < x < 2\}$, 则 $A \cap B =$ 【 】
 A. $\{x | -1 \leq x < 2\}$ B. $\{x | -2 < x < 2\}$
 C. $\{x | -2 < x < 5\}$ D. $\{x | -1 \leq x < 5\}$
- 已知 $\sin \alpha < 0$ 且 $\tan \alpha < 0$, 则 α 是 【 】
 A. 第一象限角 B. 第二象限角
 C. 第三象限角 D. 第四象限角
- 下列函数中,既是偶函数又是周期函数的为 【 】
 A. $y = \sin 2x$ B. $y = x^2$
 C. $y = \tan x$ D. $y = \cos 3x$
- 函数 $y = 1 + \log_2 x (x > 0)$ 的反函数为 【 】
 A. $y = 2^{1-x} (x \in \mathbf{R})$ B. $y = 2^{x-1} (x \in \mathbf{R})$
 C. $y = -1 + \log_2 x (x > 0)$ D. $y = \log_2 \frac{x}{2} (x > 0)$
- 函数 $y = 5\cos^2 x - 3\sin^2 x$ 的最小正周期为 【 】
 A. 4π B. 2π
 C. π D. $\frac{\pi}{2}$
- 已知平面 α , 两条直线 l_1, l_2 .
 设甲: $l_1 \perp \alpha$ 且 $l_2 \perp \alpha$;
 乙: $l_1 // l_2$,
 则 【 】
 A. 甲是乙的必要条件但不是充分条件 B. 甲是乙的充分条件但不是必要条件
 C. 甲是乙的充要条件 D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

7. 下列函数中,在 $(0, +\infty)$ 为增函数的是 【 】

A. $y = x^2 + x$

B. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

C. $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

D. $y = \cos x$

8. 不等式 $|x-1| > 1$ 的解集为 【 】

A. $\{x | x > 2\}$

B. $\{x | x < 0\}$

C. $\{x | 0 < x < 2\}$

D. $\{x | x < 0 \text{ 或 } x > 2\}$

9. 已知向量 $a = (6, 0, -3)$, $b = (-2, 9, x)$, 且 $a \perp b$, 则 $x =$ 【 】

A. -4

B. -1

C. 1

D. 4

10. 已知函数 $f(x) = 2x + 1$, 则 $f(2x) =$ 【 】

A. $4x^2 + 1$

B. $4x + 1$

C. $x + 1$

D. $2x + 2$

11. $(1+i)(1-i) =$ 【 】

A. 2

B. 1

C. 0

D. -1

12. 甲、乙各进行一次射击,若甲击中目标的概率是 0.4,乙击中目标的概率是 0.5,且甲、乙是否击中目标相互独立,则甲、乙都击中目标的概率是 【 】

A. 0.9

B. 0.5

C. 0.4

D. 0.2

13. 双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的渐近线方程为 【 】

A. $\frac{x}{4} \pm \frac{y}{9} = 0$

B. $\frac{x}{9} \pm \frac{y}{4} = 0$

C. $\frac{x}{2} \pm \frac{y}{3} = 0$

D. $\frac{x}{3} \pm \frac{y}{2} = 0$

14. 等差数列 $\{a_n\}$ 中,已知 $a_3 + a_5 = 2$, 则 $a_1 + a_2 + a_6 + a_7 =$ 【 】

A. 1

B. 2

C. 4

D. 8

15. 过抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点作 x 轴的垂线,交 C 于 A, B 两点,则 $|AB| =$ 【 】

A. 2

B. 4

C. $4\sqrt{2}$

D. 8

16. 若向量 $a = (3, 4)$, 则与 a 方向相同的单位向量为 【 】

A. $(0, 1)$

B. $(1, 0)$

C. $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

D. $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

17. 由 0, 1, 2, 3 四个数字,组成没有重复数字的三位数,共有 【 】

A. 18 个

B. 24 个

C. 48 个

D. 64 个

第 II 卷 (非选择题, 共 65 分)

得 分	评卷人

二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分)

18. 圆 $x^2 + y^2 = 5$ 在点 $(1, 2)$ 处的切线的方程为 _____.
19. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 2n + 1$, 则 $a_2 =$ _____.
20. 设球的表面积为 4π , 则该球的体积为 _____.
21. 从某大学篮球队历次比赛得分中, 抽取了 8 场比赛的得分作为样本, 数据如下:
88, 74, 73, 87, 70, 72, 86, 90,
则该样本的方差为 _____.

得 分	评卷人

三、解答题 (本大题共 4 小题, 共 49 分. 解答应写出推理、演算步骤)

22. (本小题满分 12 分)

已知 A, B 为 $\odot O$ 上的两点, 且 $AB = 3\sqrt{3}$, $\angle ABO = 30^\circ$. 求 $\odot O$ 的半径.

23. (本小题满分 12 分)

等比数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_2 + a_4 = -10$, 公比 $q = -\frac{1}{3}$.

- (I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(II) 求 $\{a_n\}$ 的前 4 项和.

24. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$.

- (I) 求 $f'(x)$;
(II) 求 $f(x)$ 在区间 $[-2, 2]$ 的最大值与最小值.

25. (本小题满分 13 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, $M(0, -1)$ 和 $N(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ 为 C 上两点.

- (I) 求 C 的标准方程;
(II) 设 P 为 C 的左顶点, 求 $\triangle PMN$ 的面积.

参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】 A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为集合的运算.

【应试指导】 $A \cap B = \{x | -1 \leq x < 2\}$.

2.【答案】 D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为三角函数的性质.

【应试指导】 正弦函数值在第三、四象限小于0,正切函数值在第二、四象限小于0,故题中所求角在第四象限.

3.【答案】 D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为函数的奇偶性和周期性.

【应试指导】 选项 A、C 是奇函数,选项 B 是偶函数,但不是周期函数,只有选项 D 既是偶函数又是周期函数.

4.【答案】 B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为函数的反函数.

【应试指导】 已知 $y = 1 + \log_2 x$, 则有 $\log_2 x = y - 1$, 化简得 $x = 2^{y-1}$, 故原函数的反函数为 $y = 2^{x-1} (x \in \mathbf{R})$.

5.【答案】 C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为三角函数的周期.

【应试指导】 整理得 $y = 3(\cos^2 x - \sin^2 x) + 2 \cos^2 x = 3 \cos 2x + \cos 2x + 1 = 4 \cos 2x + 1$, 故函数的最小正周期

为 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

6.【答案】 B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为简易逻辑.

【应试指导】 如果两直线垂直于同一平面,则两直线平行;但是如果两直线平行,这两条直线不一定垂直于同一平面,也可能两直线是在平面内,故甲是乙的充分条件但不是必要条件.

7.【答案】 A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为函数的单调性.

【应试指导】 A 项中, $y = x^2 + x = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$, 故函数在 $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上是增函数, 因此函数在 $(0, +\infty)$

上也是增函数.

8.【答案】 D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为绝对值不等式.

【应试指导】 $|x-1| > 1 \Rightarrow x-1 > 1$ 或 $x-1 < -1$, 即 $x > 2$ 或 $x < 0$, 故不等式的解集为 $\{x | x < 0 \text{ 或 } x > 2\}$.

9.【答案】 A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为垂直向量的性质.

【应试指导】 由于 $a \perp b$, 故有 $a \cdot b = 6 \times (-2) + 0 \times 9 + (-3)x = -3x - 12 = 0$, 解得 $x = -4$.

10.【答案】 B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为复合函数的计算.

【应试指导】 $f(2x) = 2(2x) + 1 = 4x + 1$.

11.【答案】 A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为复数的计算.

【应试指导】 $(1+i)(1-i) = 1-i^2 = 1+1 = 2$.

12.【答案】 D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为独立事件概率的性质.

【应试指导】 甲、乙都击中目标的概率为 $0.4 \times 0.5 = 0.2$.

13.【答案】 C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为双曲线的渐近线.

【应试指导】 令 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 0$, 得 $\frac{x}{2} \pm \frac{y}{3} = 0$, 即双曲线的渐近线为 $\frac{x}{2} \pm \frac{y}{3} = 0$.

14.【答案】 C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为等差数列的性质.

【应试指导】 由等差数列的性质可得 $a_1 + a_2 + a_6 + a_7 = a_3 + a_5 + a_3 + a_5 = 2 + 2 = 4$.

15.【答案】 B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为抛物线的性质.

【应试指导】 抛物线的焦点坐标为 $(1,0)$,准线方程为 $x=-1$,则 A 、 B 两点的距离为 A 点和 B 点到准线的距离之和,即 $|AB|=2+2=4$.

16.【答案】 C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为单位向量的求法.

【应试指导】 与向量 a 方向相同的单位向量为 $\frac{a}{|a|} = \frac{(3,4)}{\sqrt{3^2+4^2}} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.

17.【答案】 A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为排列组合.

【应试指导】 组成的没有重复数字的三位数有 $C_3^1 \cdot P_3^2 = 3 \times 3 \times 2 = 18$ 个.

二、填空题

18.【答案】 $x+2y-5=0$

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为圆的切线的求法.

【应试指导】 由题可知切点到圆心所在直线的斜率为 $\frac{2}{1}=2$,故切线的斜率为 $-\frac{1}{2}$,因此所求切线的方程为

$$y-2=-\frac{1}{2}(x-1), \text{即 } x+2y-5=0.$$

19.【答案】 2

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为数列的性质.

【应试指导】 $a_1=S_1=2+1=3$,故 $a_2=S_2-S_1=2 \times 2+1-3=2$.

20.【答案】 $\frac{4\pi}{3}$

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为球的体积公式.

【应试指导】 球的表面积为 $4\pi R^2=4\pi$,故球的半径为 $R=1$,因此球的体积为 $\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4\pi}{3}$.

21.【答案】 62.25

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为样本方差.

【应试指导】 可求得样本平均数为 $\frac{88+74+73+87+70+72+86+90}{8}=80$,因此样本方差为

$$\frac{1}{8}[(88-80)^2+(74-80)^2+(73-80)^2+(87-80)^2+(70-80)^2+(72-80)^2+(86-80)^2+(90-80)^2]=$$

62.25.

三、解答题

22. 设 $\odot O$ 的半径为 r ,则 $OA=OB=r$.

在 $\triangle AOB$ 中, $\angle OAB=\angle ABO=30^\circ$,所以 $\angle AOB=120^\circ$.

由余弦定理得 $r^2+r^2-2r^2\cos 120^\circ=(3\sqrt{3})^2$,解得 $r=3$.

所以 $\odot O$ 的半径为3.

23. (I) 由已知得 $a_1q+a_1q^3=-10$,

$$\text{又 } q=-\frac{1}{3}, \text{ 所以 } a_1\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{27}\right)=-10, \text{ 解得 } a_1=27,$$

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=27 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

$$(II) a_1+a_3=\frac{1}{q}(a_2+a_4), \text{ 又 } a_2+a_4=-10, \text{ 故 } a_1+a_2+a_3+a_4=20.$$

所以 $\{a_n\}$ 的前4项和为20.

24. (I) $f'(x)=6x^2-6x$.

(II) 令 $f'(x)=0$,解得 $x=0$ 或 $x=1$.

因为 $f(-2)=-26, f(0)=2, f(1)=1, f(2)=6$,

所以 $f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 的最大值为6,最小值为-26.

25. (I) 将点 M 和 N 的坐标代入 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 得

$$\begin{cases} \frac{1}{b^2}=1, \\ \frac{3}{a^2}+\frac{1}{4b^2}=1, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a^2=4, \\ b^2=1. \end{cases}$$

因此 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(II) 由(I)得 $P(-2,0)$,故 $|PM|=\sqrt{5}$,直线 PM 的方程为

$$x+2y+2=0,$$

因此点 N 到直线 PM 的距离

$$d=\frac{|\sqrt{3}+2 \times \frac{1}{2}+2|}{\sqrt{5}}=\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{5}},$$

所以 $\triangle PMN$ 的面积 $S=\frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$.



绝密★启用前

2020 年成人高等学校招生全国统一考试高起点

数 学

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,满分 150 分,考试时间 120 分钟。

题 号	一	二	三	总 分	统分人签字
分 数					

第 I 卷(选择题,共 85 分)

得 分	评卷人

一、选择题(本大题共 17 小题,每小题 5 分,共 85 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

- 不等式 $|x-2| < 1$ 的解集是 【 】
 A. $\{x|-1 < x < 3\}$ B. $\{x|-2 < x < 1\}$
 C. $\{x|-3 < x < 1\}$ D. $\{x|1 < x < 3\}$
- 下列函数中,在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 为减函数的是 【 】
 A. $y = \ln(3x+1)$ B. $y = x+1$
 C. $y = 5\sin x$ D. $y = 4-2x$
- 函数 $y = \log_2(x+1)$ 的定义域是 【 】
 A. $(2, +\infty)$ B. $(-2, +\infty)$
 C. $(-\infty, -1)$ D. $(-1, +\infty)$
- 直线 $x-y-3=0$ 与 $x-y+3=0$ 之间的距离为 【 】
 A. $2\sqrt{2}$ B. $6\sqrt{2}$
 C. $3\sqrt{2}$ D. 6
- 设集合 $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $N = \{x|x \leq 2\}$, 则 $M \cap N =$ 【 】
 A. $\{-1, 0, 1\}$ B. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$
 C. $\{x|0 < x \leq 2\}$ D. $\{x|-1 < x < 2\}$
- 已知点 $A(1, 0)$, $B(-1, 1)$, 若直线 $kx-y-1=0$ 与直线 AB 平行, 则 $k =$ 【 】
 A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$
 C. -1 D. 1
- 已知向量 $\vec{AB} = (1, t)$, $\vec{BC} = (-1, 1)$, $\vec{AC} = (0, 2)$, 则 $t =$ 【 】
 A. -1 B. 2
 C. -2 D. 1

- 已知双曲线 $\frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{4} = 1$ 的离心率为 3, 则 $m =$ 【 】
 A. 4 B. 1
 C. $\frac{1}{2}$ D. 2
- 函数 $y = \sin(x+3) + \sin(x-3)$ 的最大值为 【 】
 A. $-2\sin 3$ B. $2\sin 3$
 C. $-2\cos 3$ D. $2\cos 3$
- 已知 $a > b > 1$, 则 【 】
 A. $\log_2 a > \log_2 b$ B. $\log_2 \frac{1}{a} > \log_2 \frac{1}{b}$
 C. $\frac{1}{\log_2 a} > \frac{1}{\log_2 b}$ D. $\log_{\frac{1}{2}} a > \log_{\frac{1}{2}} b$
- 已知 $\cos x = \frac{3}{5}$, 且 x 为第一象限角, 则 $\sin 2x =$ 【 】
 A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{24}{25}$
 C. $\frac{18}{25}$ D. $\frac{12}{25}$
- 曲线 $y = \sin(x+2)$ 的一条对称轴的方程是 【 】
 A. $x = \frac{\pi}{2}$ B. $x = \pi$
 C. $x = \frac{\pi}{2} + 2$ D. $x = \frac{\pi}{2} - 2$
- 若 $p: x = 1; q: x^2 - 1 = 0$, 则 【 】
 A. p 既不是 q 的充分条件也不是 q 的必要条件
 B. p 是 q 的充要条件
 C. p 是 q 的必要条件但不是充分条件
 D. p 是 q 的充分条件但不是必要条件
- 已知点 $A(1, -3)$, $B(0, -3)$, $C(2, 2)$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 【 】
 A. 2 B. 3
 C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{5}{2}$
- 从红、黄、蓝、黑 4 个球中任取 3 个, 则这 3 个球中有黑球的不同取法共有 【 】
 A. 3 种 B. 4 种
 C. 2 种 D. 6 种
- 下列函数中, 最小正周期为 π 的函数是 【 】
 A. $y = \sin x + \sin x^2$ B. $y = \sin 2x$
 C. $y = \cos x$ D. $y = \sin \frac{x}{2} + 1$
- 下列函数中, 为偶函数的是 【 】
 A. $y = e^x + x$ B. $y = x^2$
 C. $y = x^3 + 1$ D. $y = \ln(2x+1)$

第 II 卷 (非选择题, 共 65 分)

得 分	评卷人

二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分)

18. 函数 $f(x) = x^2 + bx + c$ 的图像经过点 $(-1, 0)$, $(3, 0)$, 则 $f(x)$ 的最小值为 _____.
19. 某同学每次投篮命中的概率都是 0.6, 各次是否投中相互独立, 则该同学投篮 3 次恰有 2 次投中的概率是 _____.
20. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $\frac{3^n}{2}$, 则 $a_3 =$ _____.
21. 已知曲线 $y = \ln x + a$ 在点 $(1, a)$ 处的切线过点 $(2, -1)$, 则 $a =$ _____.

得 分	评卷人

三、解答题 (本大题共 4 小题, 共 49 分. 解答应写出推理、演算步骤)

22. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, $A = 30^\circ$, $AB = \sqrt{3}$, $BC = 1$.

- (I) 求 C ;
(II) 求 $\triangle ABC$ 的面积.

23. (本小题满分 12 分)

设函数 $f(x) = x^3 + x - 1$.

- (I) 求 $f(x)$ 的单调区间;
(II) 求出一个区间 (a, b) , 使得 $f(x)$ 在区间 (a, b) 存在零点, 且 $b - a < 0.5$.

24. (本小题满分 12 分)

已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, 且 $a_2 = -2$, $a_4 = -1$.

- (I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(II) 求 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

25. (本小题满分 13 分)

已知椭圆 E 的中心在坐标原点 O , 焦点在 x 轴上, 长轴长为 8, 焦距为 $2\sqrt{7}$.

- (I) 求 E 的标准方程;
(II) 若以 O 为圆心的圆与 E 交于四点, 且这四点为一个正方形的四个顶点, 求该圆的半径.

参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为绝对值不等式.

【应试指导】 $|x-2| < 1 \Rightarrow -1 < x-2 < 1 \Rightarrow 1 < x < 3$, 故不等式的解集为 $\{x | 1 < x < 3\}$.

2.【答案】D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为函数的单调性.

【应试指导】 A、B 选项在其定义域上为增函数, 选项 C 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上为增函数, 只有 D 选项在实数域上为减函数.

3.【答案】D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为对数函数的性质.

【应试指导】 由对数函数的性质可知 $x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$, 故函数的定义域为 $(-1, +\infty)$.

4.【答案】C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为直线间的距离.

【应试指导】 由题可知, 两直线平行, 故两直线的距离即为其中一条直线上一点到另一条直线的距离. 取直线 $x-y-3=0$ 上一点 $(4, 1)$, 点 $(4, 1)$ 到直线 $x-y+3=0$ 的距离为 $d = \frac{4-1+3}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = 3\sqrt{2}$.

5.【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为集合的运算.

【应试指导】 由于 $M \subseteq N$, 故 $M \cap N = M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

6.【答案】A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为直线的斜率.

【应试指导】 两直线平行则其斜率相等, $k_{AB} = \frac{1-0}{-1-1} = -\frac{1}{2}$, 而直线 $kx-y-1=0$ 的斜率为 k , 故 $k = -\frac{1}{2}$.

7.【答案】D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为向量的运算.

【应试指导】 $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = (1, t) + (-1, 1) = (0, 2)$, 故有 $t+1 = 2 \Rightarrow t = 1$.

8.【答案】C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为双曲线.

【应试指导】 由题知, $a^2 = m, b^2 = 4, c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{m+4}$, 其离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{m+4}}{\sqrt{m}} = 3$, 故 $m = \frac{1}{2}$.

9.【答案】C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为三角函数的运算.

【应试指导】 $y = \sin x \cos 3 + \cos x \sin 3 + \sin x \cos 3 - \cos x \sin 3 = 2 \sin x \cos 3$, $\cos 3 < 0$, 而 $\sin x$ 的最小值为 -1 , 故原函数的最大值为 $-2 \cos 3$.

10.【答案】A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为对数函数的性质.

【应试指导】 函数 $y = \log_2 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 由于 $a > b > 1$, 故有 $\log_2 a > \log_2 b$.

11.【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为三角函数.

【应试指导】 由于 x 为第一象限角, 故 $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - (\frac{3}{5})^2} = \frac{4}{5}$, 因此 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$.

12.【答案】D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为三角函数的性质.

【应试指导】 $y = \sin(x+2)$ 是函数 $y = \sin x$ 向左平移 2 个单位得到的, 故其对称轴也向左平移 2 个单位, $x = \frac{\pi}{2}$ 是函数 $y = \sin x$ 的一个对称轴, 因此 $x = \frac{\pi}{2} - 2$ 是 $y = \sin(x+2)$ 的一条对称轴.

13.【答案】D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为简易逻辑.

【应试指导】 $x = 1 \Rightarrow x^2 - 1 = 0$, 而 $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ 或 $x = -1$, 故 p 是 q 的充分但不必要条件.

14.【答案】D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为解三角形.

【应试指导】 易知 $AB = 1$, 点 C 到 AB 边的距离为 $2+3=5$, 故 AB 边的高为 5, 因此三角形的面积为 $\frac{1}{2} \times 1 \times 5 = \frac{5}{2}$.

15.【答案】A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为随机事件.

【应试指导】 3 个球中有黑球的取法有 $C_1^1 \cdot C_3^2 = 3$ 种.

16.【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为三角函数的性质.

【应试指导】 B 项中, 函数的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

17.【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为函数的奇偶性.

【应试指导】 A、C、D 项为非奇非偶函数, B 项为偶函数.

二、填空题

18.【答案】-4

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为一元二次函数的性质.

【应试指导】 由于函数开口向上,故其在对称轴处取得最小值,又函数过点 $(-1,0)$, $(3,0)$,故其对称轴为 $x = \frac{-1+3}{2} = 1$, $f_{\min}(1) = 1 + b + c$,而 $f(-1) = 1 - b + c = 0$, $f(3) = 9 + 3b + c = 0$,得 $b = -2$, $c = -3$,故 $f_{\min}(1) = 1 - 2 - 3 = -4$.

19.【答案】 0.432

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为随机事件的概率.

【应试指导】 投篮3次恰有2次投中的概率为 $C_3^2 \cdot 0.6^2 \cdot 0.4 = 0.432$.

20.【答案】 9

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为数列的性质.

【应试指导】 由题知 $S_n = \frac{3^n}{2}$,故有 $a_1 = \frac{3}{2}$, $a_2 = S_2 - a_1 = \frac{3^2}{2} - \frac{3}{2} = 3$, $a_3 = S_3 - a_2 - a_1 = \frac{3^3}{2} - 3 - \frac{3}{2} = 9$.

21.【答案】 -2

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为曲线的切线.

【应试指导】 $y' = \frac{1}{x}$,故曲线在点 $(1,a)$ 处的切线的斜率为 $y' \Big|_{x=1} = \frac{1}{x} \Big|_{x=1} = 1$,因此切线方程为 $y - a = x - 1$,即 $y = x - 1 + a$.又切线过点 $(2,-1)$,因此有 $-1 = 2 - 1 + a$,故 $a = -2$.

三、解答题

22.(I) 由正弦定理得 $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}$,

$$\text{即 } \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sin C}, \text{ 解得 } \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

故 $C = 60^\circ$ 或 120° .

(II) 由余弦定理得 $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{3 + AC^2 - 1}{2\sqrt{3}AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

解得 $AC = 1$ 或 $AC = 2$.

当 $AC = 1$ 时, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 1 \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

当 $AC = 2$ 时, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 2 \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

23.(I) $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$,

故函数在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,故其单调区间为 $\mathbf{R}$.

(II) 令 $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{4}$,则有

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - 1 < 0, f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{27}{64} + \frac{3}{4} - 1 > 0,$$

又由于函数在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,故其在 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ 内存在零点,

$$\text{且 } b - a = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} < 0.5 \text{ (答案不唯一).}$$

24.(I) 由题可知

$$a_1 = a_2 + 2d = -2 + 2d = -1,$$

$$\text{可得 } d = \frac{1}{2}.$$

$$\text{故 } a_n = a_2 + (n-2)d$$

$$= -2 + (n-2) \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{n}{2} - 3.$$

(II) 由(I)可知 $a_1 = \frac{1}{2} \times 1 - 3 = -\frac{5}{2}$,

$$\text{故 } S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$= \frac{n(-\frac{5}{2} + \frac{n}{2} - 3)}{2}$$

$$= \frac{1}{4}n(n-11).$$

25.(I) 由题知 $2a = 8$, $2c = 2\sqrt{7}$,

$$\text{故 } a = 4, c = \sqrt{7}, b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{16 - 7} = 3,$$

$$\text{因此椭圆方程为 } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

(II) 设圆的方程为 $x^2 + y^2 = R^2$,

因为圆与椭圆的四个交点为一正方形的顶点,设其在第一象限的交点为 A ,

则有 $OA = R$, A 点到 x 轴与 y 轴的距离相等,

$$\text{可求得 } A \text{ 点的坐标为 } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}R, \frac{\sqrt{2}}{2}R\right),$$

$$\text{而 } A \text{ 点也在椭圆上,故有 } \frac{\frac{R^2}{2}}{16} + \frac{\frac{R^2}{2}}{9} = 1,$$

$$\text{解得 } R = \frac{12\sqrt{2}}{5}.$$



绝密★启用前

2019 年成人高等学校招生全国统一考试高起点

数 学

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分。满分 150 分。考试时间 120 分钟。

题 号	一	二	三	总 分	统分人签字
分 数					

第 I 卷(选择题,共 85 分)

得 分	评卷人

一、选择题(本大题共 17 小题,每小题 5 分,共 85 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4\}$, 集合 $M = \{3, 4\}$, 则 $\complement_U M =$ 【 】
 A. $\{2, 3\}$ B. $\{2, 4\}$
 C. $\{1, 2\}$ D. $\{1, 4\}$
2. 函数 $y = \cos 4x$ 的最小正周期为 【 】
 A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{4}$
 C. π D. 2π
3. 设甲: $b = 0$;
 乙: 函数 $y = kx + b$ 的图像经过坐标原点,
 则 【 】
 A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件
 B. 甲是乙的充要条件
 C. 甲是乙的必要条件但不是充分条件
 D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件
4. 已知 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$, 则 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) =$ 【 】
 A. -3 B. $-\frac{1}{3}$
 C. 3 D. $\frac{1}{3}$
5. 函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ 的定义域是 【 】
 A. $\{x \mid x \geq -1\}$ B. $\{x \mid x \leq 1\}$
 C. $\{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$ D. $\{x \mid x \leq -1\}$

6. 设 $0 < x < 1$, 则 【 】
 A. $\log_2 x > 0$ B. $0 < 2^x < 1$
 C. $\log_{\frac{1}{2}} x < 0$ D. $1 < 2^x < 2$
7. 不等式 $\left|x + \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2}$ 的解集为 【 】
 A. $\{x \mid x > 0 \text{ 或 } x < -1\}$ B. $\{x \mid -1 < x < 0\}$
 C. $\{x \mid x > -1\}$ D. $\{x \mid x < 0\}$
8. 甲、乙、丙、丁 4 人排成一行, 其中甲、乙必须排在两端, 则不同的排法共有 【 】
 A. 4 种 B. 2 种
 C. 8 种 D. 24 种
9. 若向量 $a = (1, 1)$, $b = (1, -1)$, 则 $\frac{1}{2}a - \frac{3}{2}b =$ 【 】
 A. $(1, 2)$ B. $(-1, 2)$
 C. $(1, -2)$ D. $(-1, -2)$
10. $\log_3 1 + 16^{\frac{1}{2}} + (-2)^0 =$ 【 】
 A. 2 B. 4
 C. 3 D. 5
11. 函数 $y = x^2 - 4x - 5$ 的图像与 x 轴交于 A, B 两点, 则 $|AB| =$ 【 】
 A. 3 B. 4
 C. 6 D. 5
12. 下列函数中, 为奇函数的是 【 】
 A. $y = -\frac{2}{x}$ B. $y = -2x + 3$
 C. $y = x^2 - 3$ D. $y = 3\cos x$
13. 双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的焦点坐标是 【 】
 A. $(0, -\sqrt{7}), (0, \sqrt{7})$ B. $(-\sqrt{7}, 0), (\sqrt{7}, 0)$
 C. $(0, -5), (0, 5)$ D. $(-5, 0), (5, 0)$
14. 若直线 $mx + y - 1 = 0$ 与直线 $4x + 2y + 1 = 0$ 平行, 则 $m =$ 【 】
 A. -1 B. 0
 C. 2 D. 1
15. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_4 a_5 = 6$, 则 $a_2 a_3 a_6 a_7 =$ 【 】
 A. 12 B. 36
 C. 24 D. 72
16. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f(2x) = 4x + 1$, 则 $f(1) =$ 【 】
 A. 9 B. 5
 C. 7 D. 3
17. 甲、乙各自独立地射击一次, 已知甲射中 10 环的概率为 0.9, 乙射中 10 环的概率为 0.5, 则甲、乙都射中 10 环的概率为 【 】
 A. 0.2 B. 0.45
 C. 0.25 D. 0.75

第 II 卷 (非选择题, 共 65 分)

得 分	评卷人

二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分)

18. 椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的离心率为 _____.

19. 函数 $f(x) = x^2 - 2x + 1$ 在 $x = 1$ 处的导数为 _____.

20. 设函数 $f(x) = x + b$, 且 $f(2) = 3$, 则 $f(3) =$ _____.

21. 从一批相同型号的钢管中抽取 5 根, 测其内径, 得到如下样本数据 (单位: mm):

110.8, 109.4, 111.2, 109.5, 109.1,

则该样本的方差为 _____ mm^2 .

得 分	评卷人

三、解答题 (本大题共 4 小题, 共 49 分. 解答应写出推理、演算步骤)

22. (本小题满分 12 分)

已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, 且 $a_3 = a_5 + 1$.

(I) 求 $\{a_n\}$ 的公差 d ;

(II) 若 $a_1 = 2$, 求 $\{a_n\}$ 的前 20 项和 S_{20} .

23. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $B = 75^\circ$, $\cos C = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(I) 求 $\cos A$;

(II) 若 $BC = 3$, 求 AB .

24. (本小题满分 12 分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知 $\odot M$ 的方程为 $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 6 = 0$, $\odot O$ 经过点 M .

(I) 求 $\odot O$ 的方程;

(II) 证明: 直线 $x - y + 2 = 0$ 与 $\odot M$, $\odot O$ 都相切.

25. (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = 2x^3 - 12x + 1$, 求 $f(x)$ 的单调区间和极值.

参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】C

【考情点拨】本题考查了补集的知识点.

【应试指导】 $C_U M = U - M = \{1, 2\}$.

2.【答案】A

【考情点拨】本题考查了三角函数的最小正周期的知识点.

【应试指导】函数 $y = \cos 4x$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

3.【答案】B

【考情点拨】本题考查了简易逻辑的知识点.

【应试指导】易知 $b = 0 \Rightarrow y = kx + b$ 经过坐标原点, 而 $y = kx + b$ 经过坐标原点 $\Rightarrow b = 0$, 因此甲是乙的充要条件.

4.【答案】C

【考情点拨】本题考查了两角和的三角函数的知识点.

【应试指导】 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\alpha + \tan\frac{\pi}{4}}{1 - \tan\alpha \tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{1 - \frac{1}{2} \times 1} = 3$.

5.【答案】C

【考情点拨】本题考查了函数的定义域的知识点.

【应试指导】当 $1 - x^2 \geq 0$ 时, 函数 $y = \sqrt{1 - x^2}$ 有意义, 所以函数 $y = \sqrt{1 - x^2}$ 的定义域为 $\{x | -1 \leq x \leq 1\}$.

6.【答案】D

【考情点拨】本题考查了指数函数与对数函数的知识点.

【应试指导】当 $0 < x < 1$ 时, $1 < 2^x < 2$, $\log_2 x < 0$, $\log_{\frac{1}{2}} x > 0$.

7.【答案】A

【考情点拨】本题考查了绝对值不等式的知识点.

【应试指导】 $\left|x + \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2} \Rightarrow x + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$ 或 $x + \frac{1}{2} < -\frac{1}{2}$, 即 $x > 0$ 或 $x < -1$, 故绝对值不等式的解集为 $\{x | x > 0 \text{ 或 } x < -1\}$.

8.【答案】A

【考情点拨】本题考查了排列组合的知识点.

【应试指导】甲乙必须排在两端的排法有 $C_2^2 \cdot A_2^2 = 4$ 种.

9.【答案】B

【考情点拨】本题考查了向量的运算的知识点.

【应试指导】 $\frac{1}{2}a - \frac{3}{2}b = \frac{1}{2}(1, 1) - \frac{3}{2}(1, -1) = (-1, 2)$.

10.【答案】D

【考情点拨】本题考查了指数函数与对数函数运算的知识点.

【应试指导】 $\log_3 1 + 16^{\frac{1}{2}} + (-2)^0 = 0 + 4 + 1 = 5$.

11.【答案】C

【考情点拨】本题考查了两点间距离的知识点.

【应试指导】令 $y = x^2 - 4x - 5 = 0$, 解得 $x = -1$ 或 $x = 5$, 故 A, B 两点间的距离为 $|AB| = 6$.

12.【答案】A

【考情点拨】本题考查了函数的奇偶性的知识点.

【应试指导】对于 A 选项, $f(-x) = -\frac{2}{-x} = \frac{2}{x} = -f(x)$, 故 $f(x) = -\frac{2}{x}$ 是奇函数.

13.【答案】D

【考情点拨】本题考查了双曲线的知识点.

【应试指导】双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的焦点在 x 轴上, 易知 $a^2 = 9$, $b^2 = 16$, 故 $c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 16 = 25$, 因此焦点坐标为 $(-5, 0)$, $(5, 0)$.

14.【答案】C

【考情点拨】本题考查了直线的位置关系的知识点.

【应试指导】两直线平行斜率相等, 故有 $-m = -2$, 即 $m = 2$.

15.【答案】B

【考情点拨】本题考查了等比数列的知识点.

【应试指导】 $a_2 a_3 a_6 a_7 = a_2 a_7 \cdot a_3 a_6 = (a_4 a_5)^2 = 36$.

16.【答案】D

【考情点拨】本题考查了函数的定义域的知识点.

【应试指导】 $f(1) = f\left(2 \times \frac{1}{2}\right) = 4 \times \frac{1}{2} + 1 = 3$.

17.【答案】B

【考情点拨】本题考查了独立事件同时发生的概率的知识点.

【应试指导】甲乙都射中 10 环的概率 $P = 0.9 \times 0.5 = 0.45$.

二、填空题

18.【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【考情点拨】本题考查了椭圆的知识点.

【应试指导】由题可知, $a = 2$, $b = 1$, 故 $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}$, 离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

19.【答案】0

【考情点拨】本题考查了导数的知识点.

【应试指导】 $f'(x) = (x^2 - 2x + 1)' = 2x - 2$, 故 $f'(1) = 2 \times 1 - 2 = 0$.

20.【答案】4

【考情点拨】本题考查了一元一次函数的知识点.

【应试指导】由题可知 $f(2) = 2 + b = 3$, 得 $b = 1$, 故 $f(3) = 3 + b = 3 + 1 = 4$.

21. 【答案】 0.7

【考情点拨】 本题考查了样本方差的知识点.

【应试指导】 样本平均值 $\bar{x} = \frac{110.8 + 109.4 + 111.2 + 109.5 + 109.1}{5} = 110$, 故样本方差 $S^2 = \frac{(110.8 - 110)^2 + (109.4 - 110)^2 + (111.2 - 110)^2 + (109.5 - 110)^2 + (109.1 - 110)^2}{5} = 0.7$.

三、解答题

22. (I) 设公差为 d , 易知 $a_5 = a_3 + 2d$,

$$\text{故 } a_5 = a_3 + 2d = a_3 - 1,$$

$$\text{因此有 } d = -\frac{1}{2}.$$

(II) 由前 n 项和公式可得

$$\begin{aligned} S_{20} &= 20a_1 + \frac{20 \times (20-1)}{2} \times d \\ &= 20 \times 2 + \frac{20 \times (20-1)}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -55. \end{aligned}$$

23. (I) 由 $\cos C = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 得 $C = 45^\circ$

$$\begin{aligned} \text{故 } A &= 180^\circ - 75^\circ - 45^\circ \\ &= 60^\circ, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{因此 } \cos A &= \cos 60^\circ \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(II) 由正弦定理 $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}$,

$$\text{故 } AB = \frac{BC \sin C}{\sin A}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{3 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \sqrt{6}. \end{aligned}$$

24. (I) $\odot M$ 可化为标准方程 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = (2\sqrt{2})^2$,

其圆心 M 点的坐标为 $(1, -1)$, 半径为 $r_1 = 2\sqrt{2}$,

$\odot O$ 的圆心为坐标原点,

可设其标准方程为 $x^2 + y^2 = r_2^2$,

$\odot O$ 过 M 点, 故有 $r_2 = \sqrt{2}$,

因此 $\odot O$ 的标准方程为 $x^2 + y^2 = 2$.

(II) 点 M 到直线的距离 $d_1 = \frac{|1+1+2|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$,

点 O 到直线的距离 $d_2 = \frac{|0+0+2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$,

故 $\odot M$ 和 $\odot O$ 的圆心到直线 $x - y + 2 = 0$ 的距离均等于其半径,

即直线 $x - y + 2 = 0$ 与 $\odot M$ 和 $\odot O$ 都相切.

25. $f'(x) = 6x^2 - 12$, 令 $f'(x) = 0$,

可得 $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = -\sqrt{2}$,

当 $x < -\sqrt{2}$ 或 $x > \sqrt{2}$ 时, $f'(x) > 0$;

当 $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ 时, $f'(x) < 0$;

故 $f(x)$ 的单调增区间是 $(-\infty, -\sqrt{2}]$, $(\sqrt{2}, +\infty)$,

单调减区间是 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

当 $x = -\sqrt{2}$ 时, 函数取得极大值 $f(-\sqrt{2}) = 8\sqrt{2} + 1$;

当 $x = \sqrt{2}$ 时, 函数取得极小值 $f(\sqrt{2}) = -8\sqrt{2} + 1$.



绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试高起点数学(理工农医类)

全真模拟(一)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分。满分150分。考试时间120分钟。

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第Ⅰ卷(选择题,共84分)

得分	评卷人

一、选择题(本大题共12小题,每小题7分,共84分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

- 已知集合 $A = \{2, 4, 8\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, 则 $A \cup B =$ 【 】
 A. $\{2, 4, 6, 8\}$ B. $\{2, 4\}$
 C. $\{2, 4, 8\}$ D. $\{6\}$
- $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\sin \alpha, \alpha, \tan \alpha$ 的大小顺序是 【 】
 A. $\tan \alpha > \sin \alpha > \alpha$ B. $\tan \alpha > \alpha > \sin \alpha$
 C. $\alpha > \tan \alpha > \sin \alpha$ D. $\sin \alpha > \tan \alpha > \alpha$
- 函数 $f(x) = \tan(2x + \frac{\pi}{3})$ 的最小正周期是 【 】
 A. $\frac{\pi}{2}$ B. 2π
 C. π D. 4π
- 不等式 $|2x - 3| \leq 1$ 的解集为 【 】
 A. $\{x \mid 1 \leq x \leq 2\}$ B. $\{x \mid x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 2\}$
 C. $\{x \mid 1 \leq x \leq 3\}$ D. $\{x \mid 2 \leq x \leq 3\}$
- 设甲: $y = f(x)$ 的图像有对称轴;乙: $y = f(x)$ 是偶函数, 则 【 】
 A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件
 B. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件
 C. 甲是乙的充要条件
 D. 甲是乙的必要条件但不是充分条件

- 已知函数 $f(x) = ax^2 + b$ 的图像经过点 $(1, 2)$, 且其反函数 $f^{-1}(x)$ 的图像经过点 $(3, 0)$, 则函数 $f(x)$ 的解析式是 【 】
 A. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}$ B. $f(x) = -x^2 + 3$
 C. $f(x) = 3x^2 + 2$ D. $f(x) = x^2 + 3$
- 已知平面向量 $a = (1, t)$, $b = (-1, 2)$, 若 $a + mb$ 平行于向量 $(-2, 1)$, 则 【 】
 A. $2t - 3m + 1 = 0$ B. $2t + 3m + 1 = 0$
 C. $2t - 3m - 1 = 0$ D. $2t + 3m - 1 = 0$
- 等比数列 $\{a_n\}$ 中, 已知对于任意自然数 n 有 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2^n - 1$, 则 $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$ 的值为 【 】
 A. $(2^n - 1)^2$ B. $\frac{1}{3}(2^n - 1)^2$
 C. $\frac{1}{3}(4^n - 1)$ D. $4^n - 1$
- 函数 $y = x^2 - 2x - 3$ 的图像与直线 $y = x + 1$ 交于 A, B 两点, 则 $|AB| =$ 【 】
 A. $2\sqrt{13}$ B. 4
 C. $\sqrt{34}$ D. $5\sqrt{2}$
- 关于参数 t 的方程 $\begin{cases} x = 2pt^2 \\ y = 2pt \end{cases}$ 的图形是 【 】
 A. 圆 B. 双曲线
 C. 抛物线 D. 椭圆
- 已知抛物线 $y^2 = 6x$ 的焦点为 F , 点 $A(0, -1)$, 则直线 AF 的斜率为 【 】
 A. $\frac{3}{2}$ B. $-\frac{3}{2}$
 C. $-\frac{2}{3}$ D. $\frac{2}{3}$
- 甲、乙、丙、丁、戊五个学生排成一排, 甲必须排在乙之前的不同排法为 【 】
 A. P_4^4 B. $\frac{1}{2}P_4^4$
 C. P_5^5 D. $\frac{1}{2}P_5^5$

第 II 卷 (非选择题, 共 66 分)

得 分	评卷人

二、填空题 (本大题共 3 小题, 每小题 7 分, 共 21 分)

13. 过点 $(1, -2)$ 且与直线 $3x + y - 1 = 0$ 垂直的直线方程为 _____.

14. 已知 $\sin x = -\frac{3}{5}$, 且 x 为第四象限角, 则 $\sin 2x =$ _____.

15. 某次测试中 5 位同学的成绩分别为 79, 81, 85, 75, 80, 则他们成绩的平均数为 _____.

得 分	评卷人

三、解答题 (本大题共 3 小题, 每小题 15 分, 共 45 分. 解答应写出推理、演算步骤)

16. (本小题满分 15 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{2}{3}(4^n - 1)$.

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 若 $a_k = 128$, 求 k .

17. (本小题满分 15 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 斜率为 1 的直线 l 与 C 相交, 其中一个交点的坐标为

$(2, \sqrt{2})$, 且 C 的右焦点到 l 的距离为 1.

(I) 求 a, b ;

(II) 求 C 的离心率.

18. (本小题满分 15 分)

已知函数 $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 1$. 求

(I) $f(x)$ 的单调区间;

(II) $f(x)$ 零点的个数.

参考答案及解析

一、选择题

1. 【答案】 A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为集合的运算.

【应试指导】 $A \cup B = \{2, 4, 8\} \cup \{2, 4, 6, 8\} = \{2, 4, 6, 8\}$.

2. 【答案】 B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为三角函数的性质.

【应试指导】 角 α 是第一象限角, 如图在单位圆 O 上有, $\sin \alpha = AB$, $\alpha = \widehat{A'B}$, $\tan \alpha = A'B'$, 又 $\because AB < \widehat{A'B} < A'B'$, $\therefore \sin \alpha < \alpha < \tan \alpha$.

3. 【答案】 A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为三角函数的周期.

【应试指导】 最小正周期 $T = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2}$.

4. 【答案】 A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为不等式的解集.

【应试指导】 $|2x - 3| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq 2x - 3 \leq 1 \Rightarrow 2 \leq 2x \leq 4 \Rightarrow 1 \leq x \leq 2$, 故原不等式的解集为 $\{x \mid 1 \leq x \leq 2\}$.

5. 【答案】 D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为充分条件和必要条件.

【应试指导】 图像有对称轴的不一定是偶函数, 但偶函数的图像一定有对称轴 y 轴, 故选 D.

6. 【答案】 B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为反函数的性质.

【应试指导】 $f(x)$ 过 $(1, 2)$, 其反函数 $f^{-1}(x)$ 过 $(3, 0)$, 则 $f(x)$ 又过点 $(0, 3)$, 所以有 $f(1) = 2, f(0) = 3$, 得

$$\begin{cases} a + b = 2, \\ a \times 0 + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1, \\ b = 3, \end{cases} \therefore f(x) = -x^2 + 3.$$

7. 【答案】 B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为平行向量.

【应试指导】 $a + mb = (1, t) + m(-1, 2) = (1 - m, t + 2m)$, 又因 $a + mb$ 平行于向量 $(-2, 1)$, 则 $1 \cdot (1 - m) = -2 \cdot (t + 2m)$ 化简得: $2t + 3m + 1 = 0$.

8. 【答案】 C

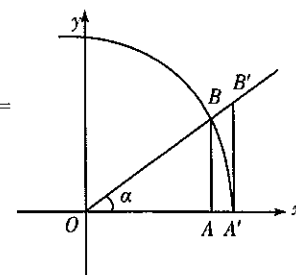
【考情点拨】 本题主要考查的知识点为等比数列的性质.

【应试指导】 $\because$ 已知 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2^n - 1$,

$$\therefore a_n = S_n - S_{n-1} = 2^n - 1 - 2^{n-1} + 1 = 2^{n-1}, \therefore a_n^2 = (2^{n-1})^2, \therefore a_1^2 = 1, a_2^2 = 4, a_3^2 = 16, a_4^2 = 64,$$

即: $a_1^2, a_2^2, \dots, a_n^2$ 是以 $q = 4$ 的等比数列.

$$\therefore S_n = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = \frac{1 - 4^n}{1 - 4} = \frac{1}{3}(4^n - 1).$$



2 题答案图

9.【答案】 D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为平面内两点间的距离公式.

【应试指导】 由 $\begin{cases} y = x^2 - 2x - 3, \\ y = x + 1 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = -1, \\ y = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 4, \\ y = 5 \end{cases}$ 即 $A(-1, 0), B(4, 5)$, 则 $|AB| = \sqrt{(-1-4)^2 + (0-5)^2} = 5\sqrt{2}$.

10.【答案】 C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为参数方程.

【应试指导】 由参数方程知为抛物线,可用消参法消去参数 t . $\begin{cases} x = 2pt^2 & ① \\ y = 2pt & ② \end{cases}$, $\frac{x}{y^2} = \frac{1}{2p} \Rightarrow y^2 = 2px$ 为顶点在原点的抛物线.

11.【答案】 D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为抛物线的焦点.

【应试指导】 抛物线 $y^2 = 6x$ 的焦点为 $F(\frac{3}{2}, 0)$, 则直线 AF 的斜率为 $k = \frac{0 - (-1)}{\frac{3}{2} - 0} = \frac{2}{3}$.

12.【答案】 D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为排列数.

【应试指导】 若不考虑甲必须排在乙前面的情况,共有 P_5^5 种排法.其中,丙、丁、戊的排法位置相同,仅甲、乙排列位置相反的排法各占一半,故甲排在乙前面的排法为 $\frac{1}{2}P_5^5$,所以选择 D.

二、填空题

13.【答案】 $x - 3y - 7 = 0$

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为直线方程.

【应试指导】 因为所求直线与直线 $3x + y - 1 = 0$ 垂直,故可设所求直线方程为 $x - 3y + a = 0$;又直线经过点 $(1, -2)$,故 $1 - 3 \times (-2) + a = 0$,则 $a = -7$,即所求直线方程为 $x - 3y - 7 = 0$.

14.【答案】 $-\frac{24}{25}$

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为三角函数公式.

【应试指导】 x 为第四象限角,则 $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - (-\frac{3}{5})^2} = \frac{4}{5}$,故 $\sin 2x = 2\sin x \cos x = -\frac{24}{25}$.

15.【答案】 80

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为平均数.

【应试指导】 成绩的平均数 $= \frac{79 + 81 + 85 + 75 + 80}{5} = 80$.

三、解答题

16. (I) $S_{n-1} = \frac{2}{3}(4^{n-1} - 1)$,

则 $a_n = S_n - S_{n-1}$

$$= \frac{2}{3}(4^n - 1) - \frac{2}{3}(4^{n-1} - 1)$$

$$= 2^{2n-1}.$$

(II) $a_k = 2^{2k-1}$

$$= 128$$

$$= 2^7,$$

$$\therefore 2k - 1 = 7,$$

$$\therefore k = 4.$$

17. (I) 由已知,直线 l 的方程为 $x - y - 2 + \sqrt{2} = 0$.

设 C 的右焦点为 $(c, 0)$, 其中 $c > 0$, 由已知得

$$\frac{|c - 2 + \sqrt{2}|}{\sqrt{2}} = 1,$$

解得 $c = 2 - 2\sqrt{2}$ (舍去), $c = 2$.

所以 $a^2 = b^2 + 4$.

因为点 $(2, \sqrt{2})$ 在椭圆上, 所以

$$\frac{4}{b^2 + 4} + \frac{2}{b^2} = 1,$$

解得 $b = -2$ (舍去), $b = 2$. 所以 $a = 2\sqrt{2}$.

(II) C 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

18. (I) $f'(x) = 3x^2 + 2x - 5$, 令 $f'(x) = 0$, 得: $x_1 = 1, x_2 = -\frac{5}{3}$,

当 $x > 1$ 或 $x < -\frac{5}{3}$ 时, $f'(x) > 0$;

当 $-\frac{5}{3} < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$.

故 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty, -\frac{5}{3})$ 和 $(1, +\infty)$, 单调减区间为 $(-\frac{5}{3}, 1)$.

(II) $f(-\frac{5}{3}) > 0, f(1) < 0$.

$\therefore f(x)$ 有 3 个零点.



绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试高起点数学(理工农医类)

全真模拟(二)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分。满分150分。考试时间120分钟。

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第Ⅰ卷(选择题,共84分)

得分	评卷人

一、选择题(本大题共12小题,每小题7分,共84分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

- 设集合 $A = \{0, 1\}$, $B = \{0, 1, 2\}$, 则 $A \cap B =$ 【 】
 A. $\{1, 2\}$ B. $\{0, 2\}$
 C. $\{0, 1\}$ D. $\{0, 1, 2\}$
- 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $AB = 3$, $A = 45^\circ$, $C = 30^\circ$, 则 $BC =$ 【 】
 A. $\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$
 C. $3\sqrt{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- 下列函数中, 为偶函数的是 【 】
 A. $y = \sqrt{x^2 + 1}$ B. $y = 2^{-x}$
 C. $y = x^{-1} - 1$ D. $y = 1 + x^{-3}$
- 下列函数的周期是 π 的是 【 】
 A. $f(x) = \cos^2 2x - \sin^2 2x$ B. $f(x) = 2\sin 4x$
 C. $f(x) = \sin x \cos x$ D. $f(x) = 4\sin x$
- 不等式 $x^2 - 2x < 0$ 的解集为 【 】
 A. $\{x \mid x < 0 \text{ 或 } x > 2\}$ B. $\{x \mid -2 < x < 0\}$
 C. $\{x \mid 0 < x < 2\}$ D. $\{x \mid x < -2 \text{ 或 } x > 0\}$
- 已知 α, β 为锐角, $\cos \alpha > \sin \beta$, 则 【 】
 A. $0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ B. $\alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$
 C. $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ D. $\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \pi$

- 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, 公差 $d \neq 0$, a_2, a_3, a_6 成等比数列, 则 $d =$ 【 】
 A. 1 B. -1
 C. -2 D. 2
- 设双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的渐近线的斜率为 k , 则 $|k| =$ 【 】
 A. $\frac{9}{16}$ B. $\frac{16}{9}$
 C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{3}{4}$
- 函数 $f(x) = 2\cos(3x - \frac{\pi}{3})$ 在区间 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ 的最大值是 【 】
 A. 0 B. $\sqrt{3}$
 C. 2 D. -1
- 从点 $M(x, 3)$ 向圆 $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 1$ 作切线, 切线长的最小值等于 【 】
 A. 4 B. $2\sqrt{6}$
 C. 5 D. $\sqrt{26}$
- 双曲线 $3x^2 - 4y^2 = 12$ 的焦距为 【 】
 A. $2\sqrt{7}$ B. $2\sqrt{3}$
 C. 4 D. 2
- 某同学每次投篮投中的概率为 $\frac{2}{5}$, 该同学投篮2次, 只投中1次的概率为 【 】
 A. $\frac{12}{25}$ B. $\frac{9}{25}$
 C. $\frac{6}{25}$ D. $\frac{3}{5}$

第Ⅱ卷(非选择题,共66分)

得分	评卷人

二、填空题(本大题共3小题,每小题7分,共21分)

- 若平面向量 $a = (x, 1)$, $b = (1, -2)$, 且 $a \parallel b$, 则 $x =$ _____.
- $\frac{1}{3}\sqrt{18}i + \frac{3}{2}\sqrt{8}i - \frac{2}{5}\sqrt{50}i =$ _____.
- 曲线 $y = x^2 - e^x + 1$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为 _____.

得 分	评卷人

三、解答题(本大题共3小题,每小题15分,共45分.解答应写出推理、演算步骤)

16.(本小题满分15分)

在 $\triangle ABC$ 中, $A = 30^\circ$, $AB = 2$, $BC = \sqrt{3}$.求

(I) $\sin C$;

(II) AC .

17.(本小题满分15分)

设函数 $f(x) = 2x^3 + 3mx^2 - 36x + m$,且 $f'(-1) = -36$.

(I) 求 m ;

(II) 求 $f(x)$ 的单调区间.

18. (本小题满分 15 分)

已知椭圆 C 的长轴长为 4, 两焦点分别为 $F_1(-\sqrt{3}, 0), F_2(\sqrt{3}, 0)$.

(I) 求 C 的标准方程;

(II) 若 P 为 C 上一点, $|PF_1| - |PF_2| = 2$, 求 $\cos \angle F_1PF_2$.

参考答案及解析

一、选择题

1. 【答案】 C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为集合的交集.

【应试指导】 $A \cap B = \{0, 1\} \cap \{0, 1, 2\} = \{0, 1\}$.

2. 【答案】 C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为三角形的正弦定理.

【应试指导】 由正弦定理可得: $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}$, 即 $\frac{3}{\frac{1}{2}} = \frac{BC}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow BC = 3\sqrt{2}$.

3. 【答案】 A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为函数的奇偶性.

【应试指导】 A 项, $y = f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, 则 $f(-x) = \sqrt{(-x)^2 + 1} = \sqrt{x^2 + 1} = f(x)$, 故 $y = \sqrt{x^2 + 1}$ 为偶函数.

4. 【答案】 C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为三角函数的周期.

【应试指导】 求三角函数的周期时, 一般应将函数转化为

$y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 或 $y = A\cos(\omega x + \varphi)$ 型, 然后利用正弦、余弦型的周期公式 $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$ 求解.

A, $f(x) = \cos^2 2x - \sin^2 2x = \cos(2 \times 2x) = \cos 4x, T = \frac{\pi}{2}$.

B, $f(x) = 2\sin 4x, T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

C, $f(x) = \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

D, $f(x) = 4\sin x, T = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$.

5. 【答案】 C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为一元二次不等式的解集.

【应试指导】 $x^2 - 2x < 0 \Rightarrow x(x - 2) < 0 \Rightarrow 0 < x < 2$, 故解集为 $\{x | 0 < x < 2\}$.

6. 【答案】 A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为三角函数的图像及诱导公式.

【应试指导】 方法一: 由 $\cos \alpha > \sin \beta$, 诱导公式 $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha$, 得 $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) > \sin \beta$.

$\because \frac{\pi}{2} - \alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\therefore \frac{\pi}{2} - \alpha > \beta$, 移项即得 $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$, 又 $\because \alpha + \beta > 0$, $\therefore 0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$.

方法二: 可由 $\cos \alpha$ 与 $\sin \beta$ 的图像知, 当 $0 < \beta < \frac{\pi}{4}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ 时, $\cos \alpha > \sin \beta$, 则 $0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$.

7.【答案】C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为等差数列和等比数列.

【应试指导】 $\{a_n\}$ 为等差数列, $a_1 = 1$, 则 $a_2 = 1 + d, a_3 = 1 + 2d, a_6 = 1 + 5d$. 又因 a_2, a_3, a_6 成等比数列, 则 $a_3^2 = a_2 \cdot a_6$, 即 $(1 + 2d)^2 = (1 + d)(1 + 5d)$, 解得 $d = 0$ (舍去) 或 $d = -2$, 故选 C.

8.【答案】D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为双曲线的渐近线.

【应试指导】 双曲线渐近线的斜率为 $k = \pm \frac{b}{a}$, 故本题中 $k = \pm \frac{3}{4}$, 即 $|k| = \frac{3}{4}$.

9.【答案】C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为三角函数的最值.

【应试指导】 当 $x = \frac{\pi}{9}$ 时, 函数 $f(x) = 2\cos(3x - \frac{\pi}{3})$ 取最大值, 最大值为 2.

10.【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为圆的切线.

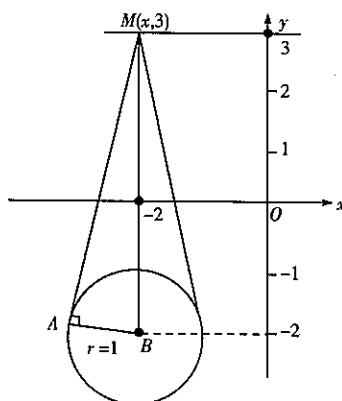
【应试指导】 如图, 相切是直线与圆的位置关系中的一种, 此题利用圆心坐标、半径, 求出切线长.

由圆的方程知, 圆心为 $B(-2, -2)$, 半径为 1, 设切点为 A , $\triangle AMB$ 为 $\text{Rt}\triangle$, 由勾股定理得,

$$MA^2 = MB^2 - 1^2 = (x + 2)^2 + (3 + 2)^2 - 1^2 = (x + 2)^2 + 24,$$

$$MA = \sqrt{(x + 2)^2 + 24},$$

当 $x + 2 = 0$ 时, MA 取最小值, 最小值为 $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.



10 题答案图

11.【答案】A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为双曲线的焦距.

【应试指导】 $3x^2 - 4y^2 = 12$ 可化为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$, 即 $a^2 = 4, b^2 = 3$, 则 $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{7}$, 则焦距 $2c = 2\sqrt{7}$.

12.【答案】A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为随机事件的概率.

【应试指导】 只投中 1 次的概率为: $C_2^3 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{25}$.

二、填空题

13.【答案】 $-\frac{1}{2}$

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为平行向量的性质.

【应试指导】 由于 $a \parallel b$, 故 $\frac{x}{1} = \frac{1}{-2}$, 即 $x = -\frac{1}{2}$.

14.【答案】 $2\sqrt{2}i$

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为复数的运算.

【应试指导】 $\frac{1}{3}\sqrt{18}i + \frac{3}{2}\sqrt{8}i - \frac{2}{5}\sqrt{50}i = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{2}i + \frac{3}{2} \times 2\sqrt{2}i - \frac{2}{5} \times 5\sqrt{2}i = 2\sqrt{2}i$.

15.【答案】 $x + y = 0$

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为导数的几何意义.

【应试指导】 根据导数的几何意义, 曲线在 $(0, 0)$ 处的切线斜率 $k = y' \Big|_{x=0} = -1$, 则切线方程为 $y - 0 = -1 \cdot (x - 0)$, 化简得: $x + y = 0$.

三、解答题

16. (I) $\because \frac{\sin C}{AB} = \frac{\sin A}{BC}$,

$$\therefore \sin C = \frac{\sin A}{BC} \cdot AB$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(II) 由余弦定理, $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$,

$$\text{可得 } AC^2 - 2\sqrt{3}AC + 1 = 0,$$

$$\text{解得 } AC = \sqrt{3} + \sqrt{2} \text{ 或 } \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

17. (I) 由已知得 $f'(x) = 6x^2 + 6mx - 36$,

$$\text{又由 } f'(-1) = -36 \text{ 得}$$

$$6 - 6m - 36 = -36,$$

$$\text{故 } m = 1.$$

(II) 由(I)得, $f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$.

$$\text{令 } f'(x) = 0, \text{ 解得 } x_1 = -3, x_2 = 2.$$

$$\text{当 } x < -3 \text{ 时, } f'(x) > 0;$$

$$\text{当 } -3 < x < 2 \text{ 时, } f'(x) < 0;$$

$$\text{当 } x > 2 \text{ 时, } f'(x) > 0.$$

故 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-3, 2)$, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -3), (2, +\infty)$.

18. (I) 由题意可知, $a = 2, c = \sqrt{3}$,

$$\therefore b = \sqrt{a^2 - c^2} = 1,$$

$$\therefore \text{椭圆的标准方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

$$(II) \begin{cases} |PF_1| + |PF_2| = 2a = 4, \\ |PF_1| - |PF_2| = 2, \end{cases}$$

$$\text{解得: } |PF_1| = 3, |PF_2| = 1,$$

由余弦定理可得:

$$\cos \angle F_1PF_2 = \frac{|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - |F_1F_2|^2}{2|PF_1||PF_2|}$$

$$= \frac{3^2 + 1^2 - (2\sqrt{3})^2}{2 \times 3 \times 1}$$

$$= -\frac{1}{3}.$$



绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试高起点数学(理工农医类)

全真模拟(三)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分。满分150分。考试时间120分钟。

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第Ⅰ卷(选择题,共84分)

得分	评卷人

一、选择题(本大题共12小题,每小题7分,共84分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 设全集 $I = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{0, 3, 4\}$, 则 $A \cap \bar{B}$ 是 【 】
 A. $\{2, 4\}$ B. $\{1, 2\}$
 C. $\{0, 1\}$ D. $\{0, 1, 2, 3\}$
2. 函数 $y = 2\sin x \cos x$ 的最小正周期是 【 】
 A. $\frac{\pi}{2}$ B. 4π
 C. 2π D. π
3. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\lg \sin A - \lg \sin B - \lg \cos C = \lg 2$, 则 $\triangle ABC$ 是 【 】
 A. 以 A 为直角的三角形 B. $b = c$ 的等腰三角形
 C. 等边三角形 D. 钝角三角形
4. 下列函数【 】是非奇非偶函数.
 A. $f(x) = x$ B. $f(x) = x^2 - 2|x| - 1$
 C. $f(x) = 2^{|x|}$ D. $f(x) = 2^x$
5. 直线 $3x - 4y - 9 = 0$ 与圆 $\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数) 的位置关系是 【 】
 A. 相交但直线不过圆心 B. 相交但直线通过圆心
 C. 相切 D. 相离

6. 将一颗骰子抛掷1次, 得到的点数为偶数的概率为 【 】

A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{6}$
 C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

7. 设 a, b 都是单位向量, 下列命题正确的是 【 】

A. $a = b$ B. 若 $a \parallel b$, 则 $a = b$
 C. $a^2 = b^2$ D. $a \cdot b = 1$

8. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\triangle ABC$ 的面积 $= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4}$, 则 $\angle C =$ 【 】

A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{4}$
 C. $\frac{\pi}{6}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

9. $64^{\frac{2}{3}} + \log_{\frac{1}{3}} 81 =$ 【 】

A. 8 B. 14
 C. 12 D. 10

10. 已知 $\alpha \cap \beta = a$, $b \perp \beta$, b 在 α 内的射影是 b' , 那么 b' 和 a 的关系是 【 】

A. $b' \parallel a$ B. $b' \perp a$
 C. b' 与 a 是异面直线 D. b' 与 a 相交成锐角

11. 5名高中毕业生报考3所院校, 每人只能报一所院校, 则有【 】种不同的报名方法.

A. P_3^3 B. 5^3
 C. 3^5 D. C_3^3

12. 曲线 $y = x^3 - 4x + 2$ 在点 $(1, -1)$ 处的切线方程为 【 】

A. $x - y - 2 = 0$ B. $x - y = 0$
 C. $x + y = 0$ D. $x + y - 2 = 0$

第Ⅱ卷(非选择题,共66分)

得分	评卷人

二、填空题(本大题共3小题, 每小题7分, 共21分)

13. 椭圆的中心在原点, 一个顶点和一个焦点分别是直线 $x + 3y - 6 = 0$ 与两坐标轴的交点, 则此椭圆的标准方程为_____.

14. 若二次函数 $f(x) = ax^2 + 2x$ 的最小值为 $-\frac{1}{3}$, 则 $a =$ _____.

15. 设离散型随机变量 ξ 的分布列如下表, 那么 ξ 的期望等于 _____.

ξ	6	5.4	5	4	0
P	0.7	0.1	0.1	0.06	0.04

得 分	评卷人

三、解答题(本大题共3小题, 每小题15分, 共45分. 解答应写出推理、演算步骤)

16. (本小题满分15分)

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项都是正数, 且 $a_1 + a_3 = 10, a_2 + a_3 = 6$.

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 求 $\{a_n\}$ 的前5项和.

17. (本小题满分15分)

已知正六棱锥的高和底的边长都等于 a .

(I) 求它的对角面(过不相邻的两条侧棱的截面)的面积、全面积和体积;

(II) 求它的侧棱和底面所成的角, 侧面和底面所成的角.

18. (本小题满分15分)

某县位于沙漠边缘, 到1999年底全县绿化率已达30%. 从2000年开始, 每年出现这样的局面: 原有沙漠面积的16%被栽上树改为绿洲, 而同时原有绿地面积的4%又被侵蚀, 变为沙漠.

(I) 设全县的面积为1, 1999年底绿洲面积为 $a_1 = \frac{3}{10}$, 经过一年绿洲面积为 a_2 , 经过 n 年绿洲

面积为 a_n , 求证: $a_{n+1} = \frac{4}{5}a_n + \frac{4}{25}$;

(II) 问至少经过多少年的绿化, 才能使全县的绿洲面积超过60% (年取整数).

参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为集合的运算.

【应试指导】 $A \cap \bar{B} = \{0, 1, 2, 3\} \cap \{1, 2\} = \{1, 2\}$.

2.【答案】D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为函数的最小正周期.

【应试指导】 $y = 2\sin x \cos x = \sin 2x$, 故其最小正周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

3.【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为对数函数与三角形的性质.

【应试指导】 判断三角形的形状, 条件是用一个对数等式给出, 先将对数式利用对数的运算法则整理.

$\because \lg \sin A - \lg \sin B - \lg \cos C = \lg 2$, 由对数运算法则可得, 左 = $\lg \frac{\sin A}{\sin B \cos C} = \lg 2$,

两个对数底数相等则真数相等: $\frac{\sin A}{\sin B \cos C} = 2$, 即 $2\sin B \cos C = \sin A$,

在 $\triangle ABC$ 中, $\because A + B + C = 180^\circ$, $\therefore A = 180^\circ - (B + C)$,

又 $\because \sin A = \sin[180^\circ - (B + C)] = \sin(B + C) = \sin B \cdot \cos C + \cos B \cdot \sin C$,

$\therefore \frac{\sin A}{\sin B \cos C} = \frac{\sin B \cos C + \cos B \sin C}{\sin B \cos C} = 2$,

$1 + \frac{\cos B \sin C}{\sin B \cos C} = 2 \Rightarrow 1 + \cot B \tan C = 2$, $\frac{\tan C}{\tan B} = 1 \Rightarrow \tan C = \tan B \Rightarrow c = b$, 故为等腰三角形.

4.【答案】D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为函数的奇偶性.

【应试指导】 考查函数的奇偶性, 利用奇偶函数的定义就可以讨论.

$\because A, f(-x) = -x = -f(x)$ 为奇函数.

B, $f(-x) = (-x)^2 - 2|-x| - 1 = x^2 - 2|x| - 1 = f(x)$ 为偶函数.

C, $f(-x) = 2^{|-x|} = 2^{|x|} = f(x)$ 为偶函数.

D, $f(-x) = 2^{-x} \neq -f(x) \neq f(x)$ 为非奇非偶函数.

5.【答案】A

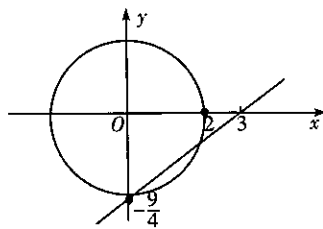
【考情点拨】 本题主要考查的知识点为圆与直线的位置关系.

【应试指导】 方法一. $\because \begin{cases} x = 2\cos\theta & ① \\ y = 2\sin\theta & ② \end{cases}$, ①² + ②² 得: $x^2 + y^2 = 4$,

圆心 $O(0, 0)$, $r = 2$, 则圆心 O 到直线的距离为 $d = \frac{|0 - 0 - 9|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{9}{5} < 2$,

$0 < d < 2$, $\therefore$ 直线与圆相交, 而不过圆心.

方法二. 画图可得出结论, 直线与圆相交, 而不过圆心(如图).



5 题答案图

6.【答案】D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为概率.

【应试指导】 一颗骰子的点数分别为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 其中偶数与奇数各占一半, 故抛掷 1 次, 得到的点数为偶数的概率为 $\frac{1}{2}$.

7.【答案】C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为单位向量的性质.

【应试指导】 单位向量: 长度为 1 的向量(没有定方向).

选项 A, $a = b$ 错误,

$\because a, b$ 的长度相等, 但方向不一定相同.

选项 B, 若 $a \parallel b$ 则 $a = b$ 错,

$\because a, b$ 方向可相反, 则 $a \nparallel b$.

选项 C, 单位向量的长度是相等的.

选项 D, $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cos \langle a, b \rangle = 1 \times 1 \times \cos \langle a, b \rangle = \cos \langle a, b \rangle$,

$\because \langle a, b \rangle$ 的夹角不知, $\therefore$ D 错.

8.【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为余弦定理.

【应试指导】 余弦定理是解斜三角形的重要公式, 本题利用余弦定理及三角形面积公式

($S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$) 求出角.

$\because \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{4S_{\triangle ABC}}{2ab}$ (已知 $S_{\triangle ABC} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4}$),

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \cos C$, ①

又 $\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C$, ②

由 ①② 得: $\cos C = \sin C$, $\therefore \angle C = \frac{\pi}{4}$.

9.【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为对数函数与指数函数的性质.

【应试指导】 $64^{\frac{2}{3}} + \log_{\frac{1}{9}} 81 = (2^6)^{\frac{2}{3}} + \log_{\frac{1}{9}} \left(\frac{1}{9}\right)^{-2} = 2^{6 \times \frac{2}{3}} - 2 = 16 - 2 = 14$.

10.【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为三垂线定理的逆定理.

【应试指导】 $\because \alpha \cap \beta = a, b \perp \beta, \therefore b \perp a$, 又 $\because a \subset \alpha, \therefore$ 由三垂线定理的逆定理知, b 在 α 内的射影 $b' \perp a$. 故选 B.

11.【答案】C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为排列与组合.

【应试指导】 将院校看成元素, 高中生看成位置, 由重复排列的元素、位置的条件口诀:

“元素可挑剔, 位置不可缺”, 重复排列的种数共有“元素”种, 即将元素的个数作为底数, 位置的个数作为指数. 即: 元素(院校)的个数为 3, 位置(高中生)的个数为 5, 共有 3^5 种.

12.【答案】C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为曲线的切线方程.

【应试指导】 $y' = 3x^2 - 4$, 当 $x = 1$ 时 $y' = 3 - 4 = -1$, 故曲线在点 $(1, -1)$ 处的切线方程为 $y + 1 = -1(x - 1)$, 即 $x + y = 0$.

二、填空题

13. 【答案】 $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{4} = 1$ 或 $\frac{y^2}{40} + \frac{x^2}{36} = 1$

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为椭圆标准方程.

【应试指导】 原直线方程可化为 $\frac{x}{6} + \frac{y}{2} = 1$, 交点 $(6, 0), (0, 2)$.

当点 $(6, 0)$ 是椭圆一个焦点, 点 $(0, 2)$ 是椭圆一个顶点时, $c = 6, b = 2, a^2 = 40 \Rightarrow \frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{4} = 1$.

当点 $(0, 2)$ 是椭圆一个焦点, $(6, 0)$ 是椭圆一个顶点时, $c = 2, b = 6, a^2 = 40 \Rightarrow \frac{y^2}{40} + \frac{x^2}{36} = 1$.

14. 【答案】 3

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为二次函数的最小值.

【应试指导】 由于二次函数 $f(x) = ax^2 + 2x$ 有最小值, 故 $a > 0$, 故 $\frac{4a \times 0 - 2^2}{4a} = -\frac{1}{3} \Rightarrow a = 3$.

15. 【答案】 5.48

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为随机变量的期望.

【应试指导】 $E(\xi) = 6 \times 0.7 + 5.4 \times 0.1 + 5 \times 0.1 + 4 \times 0.06 + 0 \times 0.04 = 5.48$.

三、解答题

16. (I) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由已知得

$$\begin{cases} a_1(1+q^2) = 10, \\ a_1(q+q^2) = 6. \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a_1 = 1, \\ q = -3, \end{cases} \text{ (舍去)} \quad \begin{cases} a_1 = 8, \\ q = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

因此 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

$$(II) \{a_n\} \text{ 的前 5 项和为 } \frac{8\left(1 - \frac{1}{2^5}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{31}{2}.$$

17. 设正六棱锥为 $S-ABCDEF$, SO 为高, SK 为面 SEF 的斜高, 连接 AC, AD ,

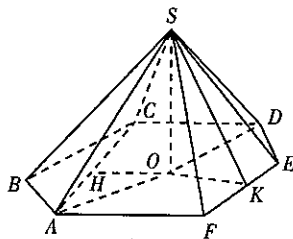
则 $\triangle SAC, \triangle SAD$ 都是对角面, $AD = 2a, AC = 2AB \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}a, SA = SC = \sqrt{SO^2 + AO^2} = \sqrt{2}a$.

(I) $S_{\triangle SAD} = a^2$.

$$\triangle SAC \text{ 的高 } h = \frac{\sqrt{5}}{2}a, S_{\triangle SAC} = \frac{\sqrt{15}}{4}a^2.$$

$$V_{\text{六棱锥}} = \frac{1}{3} \times \frac{(a+2a) \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2}}{2} \times 2 \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{2}a^3,$$

$$SK = \sqrt{SE^2 - EK^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}a,$$



17 题答案图

$$\begin{aligned} S_{\text{六棱锥全}} &= S_{\text{六棱锥侧}} + S_{\text{六边形}} = \frac{3\sqrt{7}}{2}a^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 \\ &= \frac{3}{2}(\sqrt{7} + \sqrt{3})a^2. \end{aligned}$$

(II) $\because SO \perp$ 底面, $\therefore \angle SAO$ 是棱 SA 与底面所成的角,

$\because SO \perp AO, SO = AO, \therefore \angle SAO = 45^\circ$.

$\because SO \perp$ 底面, $SK \perp EF, EF \subset$ 底面,

$\therefore OK \perp EF$,

$\therefore \angle SKO$ 是面 SEF 与底面所成的二面角的平面角,

$$\tan \angle SKO = \frac{SO}{OK} = \frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \angle SKO = \arctan \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

18. (I) 过 n 年后绿洲面积为 a_n , 则沙漠面积为 $1 - a_n$, 由题意知:

$$a_{n+1} = (1 - a_n)16\% + a_n96\% = \frac{4}{5}a_n + \frac{4}{25}.$$

(II) $a_1 = \frac{3}{10}, a_n = \frac{4}{5}a_{n-1} + \frac{4}{25} (n \geq 2)$, 则

$$\begin{cases} a_n - \frac{4}{5} = \frac{4}{5}\left(a_{n-1} - \frac{4}{5}\right) & (n \geq 2) \\ a_1 - \frac{4}{5} = -\frac{1}{2} \end{cases},$$

$\therefore \{a_n - \frac{4}{5}\}$ 是首项为 $-\frac{1}{2}$, 公比为 $\frac{4}{5}$ 的等比数列,

$$a_n - \frac{4}{5} = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}, \text{ 即 } a_n = \frac{4}{5} - \frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1},$$

要使 $a_n > \frac{3}{5}$, 即 $\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} < \frac{2}{5}, n \geq 6$,

$\therefore$ 至少需要 6 年, 才能使全县的绿化面积超过 60%.



绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试高起点数学(理工农医类)

全真模拟(四)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分。满分150分。考试时间120分钟。

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第Ⅰ卷(选择题,共84分)

得分	评卷人

一、选择题(本大题共12小题,每小题7分,共84分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 设全集 $U = \{x | 2 \leq x \leq 20, x \in \mathbb{Z}\}$, $M = \{4 \text{ 的倍数}\}$, $N = \{3 \text{ 的倍数}\}$, $M \cup N =$ 【 】

- A. $\{3, 4, 6, 8, 9, 12, 15, 16, 18, 20\}$ B. $\{3\}$
C. $\{x | 2 < x \leq 20\}$ D. $\{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

2. 若 $\sin \alpha > \tan \alpha$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $\alpha \in$ 【 】

- A. $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$ B. $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$
C. $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ D. $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

3. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1 = 2$, $a_3 = 6$, 则 $a_7 =$ 【 】

- A. 10 B. 12
C. 14 D. 8

4. 函数 $y = 2^x$ 的图像与函数 $x = \log_2 y$ 的图像 【 】

- A. 关于 x 轴对称 B. 关于 y 轴对称
C. 关于直线 $y = x$ 对称 D. 是同一条曲线

5. 对满足 $a > b$ 的任意两个非零实数, 下列不等式成立的是 【 】

- A. $\sqrt{|a|} > \sqrt{|b|}$ B. $\lg a^2 > \lg b^2$
C. $a^4 > b^4$ D. $\left(\frac{1}{2}\right)^a < \left(\frac{1}{2}\right)^b$

6. 6 名学生和 1 名教师站成一排照相, 教师必须站在中间的站法有 【 】

- A. P_7^7 B. P_6^6
C. P_5^5 D. $2P_3^3$

7. 已知向量 $a \perp b$, $a = (-1, 2)$, $b = (x, 2)$, 则 $x =$ 【 】

- A. 4 B. -8
C. 8 D. -4

8. 与直线 $2x - 4y + 4 = 0$ 的夹角为 45° , 且与这直线的交点恰好在 x 轴上的直线方程是 【 】

- A. $x - 3y + 2 = 0$ B. $3x + y + 6 = 0$
C. $x - 3y + 2 = 0$ 或 $3x - y + 6 = 0$ D. $x + 3y + 2 = 0$ 或 $3x - y + 6 = 0$

9. 下列各式正确的是 【 】

- A. $\cos 2 < \sin 1 < \tan \pi$ B. $\cos 2\pi < \cot \pi < \sin 1$
C. $\cos 1 < \cos 2 < \sin 1$ D. $\cos 2 < \cos 1 < \cot \pi$

10. 圆 $\begin{cases} x = 1 + r \cos \theta \\ y = -2 + r \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数) 的圆心在【 】点上.

- A. $(1, -2)$ B. $(0, 5)$
C. $(5, 5)$ D. $(0, 0)$

11. 已知直线 $l_1: x + 2 = 0$ 和 $l_2: y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$, l_1 与 l_2 的夹角是 【 】

- A. 45° B. 60°
C. 120° D. 150°

12. 已知向量 $a = (3, 4)$, 向量 $b = (0, -2)$, 则 $\cos \langle a, b \rangle$ 的值为 【 】

- A. $\frac{4}{5}$ B. $-\frac{4}{5}$
C. $\frac{2}{25}$ D. $-\frac{2}{25}$

第Ⅱ卷(非选择题,共66分)

得分	评卷人

二、填空题(本大题共3小题,每小题7分,共21分)

13. 顶点在原点、焦点在 x 轴上且通径(过焦点和对称轴垂直的弦)长为 6 的抛物线方程为_____.

14. 已知 $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$, $x^2 - xy + y^2$ 的值域为_____.

15. 函数 $y = 2^x - 2$ 的图像与坐标轴的交点共有_____个.

得 分	评卷人

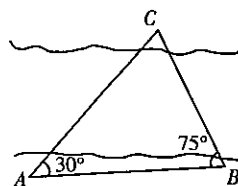
三、解答题(本大题共3小题,每小题15分,共45分.解答应写出推理、演算步骤)

16.(本小题满分15分)

某工厂每月生产 x 台游戏机的收入为 $R(x) = -\frac{4}{9}x^2 + 130x - 206$ (百元),成本函数为 $C(x) = 50x + 100$ (百元),当每月生产多少台时,获利润最大?最大利润为多少?

17.(本小题满分15分)

为了测河的宽,在岸边选定两点 A 和 B ,望对岸标记物 C ,测得 $\angle CAB = 30^\circ$, $\angle CBA = 75^\circ$, $AB = 120\text{m}$,求河的宽.



18.(本小题满分15分)

已知椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$,问实数 m 在什么范围内,过点 $(0, m)$ 存在两条互相垂直的直线都与椭圆有公共点.

参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】A

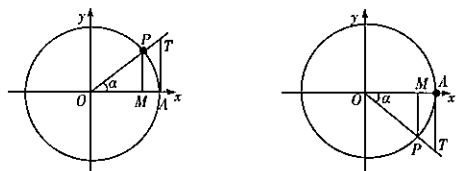
【考情点拨】 本题主要考查的知识点为集合的运算.

【应试指导】 $M = \{4, 8, 12, 16, 20\}, N = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$, 则 $M \cup N = \{3, 4, 6, 8, 9, 12, 15, 16, 18, 20\}$.

2.【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为利用三角函数线求角.

【应试指导】 首先做出单位圆, 然后根据问题的约束条件, 利用三角函数线找出满足条件的 α 角取值范围.



2 题答案图

$\because \sin \alpha > \tan \alpha, \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 又 $\because \sin \alpha = MP, \tan \alpha = AT$,

(1) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \sin \alpha < \tan \alpha$.

(2) $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0, \sin \alpha > \tan \alpha$. 故选 B.

3.【答案】C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为等差数列的性质.

【应试指导】 因为 $\{a_n\}$ 是等差数列, 设公差为 d , 则 $a_3 = a_1 + 2d \Rightarrow 2 + 2d = 6 \Rightarrow d = 2$, 所以 $a_7 = a_1 + 6d = 2 + 6 \times 2 = 14$.

4.【答案】D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为指数函数的图像.

【应试指导】 函数 $y = 2^x$ 与函数 $x = \log_2 y$, 是指对函数的两种书写方式, 不是互为反函数, 故是同一条曲线, 但在 $y = 2^x$ 中, x 为自变量, y 为函数, 在 $x = \log_2 y$ 中, y 为自变量, x 为函数.

5.【答案】D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为指数函数与对数函数的性质.

【应试指导】 A 错误, 例如: $-2 > -4$, 而 $\sqrt{-2} < \sqrt{-4}$.

B 错误, 例如: $-10 > -100$, 而 $\lg(-10)^2 < \lg(-100)^2$.

C 错误, 例如: $-1 > -2$, 而 $(-1)^4 < (-2)^4$.

D 对, $a > b, \therefore -a < -b$, 又 $\because \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^a = 2^{-a} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^b = 2^{-b} \end{cases}$,

$\therefore 2^{-a} < 2^{-b}$ 即 $\left(\frac{1}{2}\right)^a < \left(\frac{1}{2}\right)^b$.

6.【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为排列数.

【应试指导】 此题是有条件限制的排列问题. 让教师站在中间, 6 名学生的全排列有 P_6^6 种.

7.【答案】A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为向量的垂直.

【应试指导】 $\because a \perp b$,

$\therefore a \cdot b = (-1, 2) \cdot (x, 2) = 0$, 即 $-1 \cdot x + 2 \times 2 = 0, -x + 4 = 0, x = 4$.

8.【答案】D

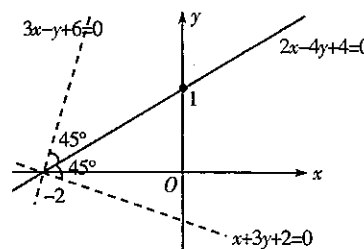
【考情点拨】 本题主要考查的知识点为两直线的夹角公式.

【应试指导】 A、B 只有一个直线方程, 排除, 从 C、D 中选.

$\because 2x - 4y + 4 = 0 \Rightarrow k_1 = \frac{1}{2}$, 由两条直线的夹角公式, 得

$$\tan \theta = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right| = \left| \frac{\frac{1}{2} - k_2}{1 + \frac{1}{2} k_2} \right| = 1 \Rightarrow k_2 = 3 \text{ 或 } k_2 = -\frac{1}{3},$$

两直线的交点为 $(-2, 0)$, $\therefore$ 得 $3x - y + 6 = 0, x + 3y + 2 = 0$.



8 题答案图

9.【答案】D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为三角函数的性质.

【应试指导】 选项 A 错, $\because \cos 2 < 0, (2 \in \text{第二象限角}) \therefore \sin 1 > 0, (1 \in \text{第一象限角}) \therefore \tan \pi = 0, \therefore \tan \pi < \sin 1$.

选项 B 错, $\because \cos 2\pi = 1, \cot \pi^\circ = \cot 3.14^\circ > 0, 1 < \cot 3.14^\circ < +\infty, 1 > \sin 1 > 0, \cos \pi^\circ > \sin 1$.

选项 C 错, $\because \cos 2 < 0, \cos 1 > 0, \therefore \cos 2 < \cos 1$.

选项 D 对, $\because \cos 2 < 0, 0 < \cos 1 < 1, 1 < \cot \pi^\circ < +\infty, \therefore \cos 2 < \cos 1 < \cot \pi^\circ$.

10.【答案】A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为圆的参数方程.

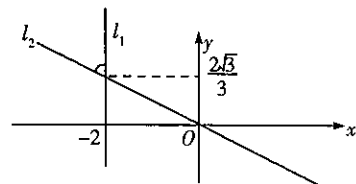
【应试指导】 因为 $\begin{cases} x = 1 + r \cos \theta \\ y = -2 + r \sin \theta \end{cases}$, $\therefore$ 圆的圆心为 $O(1, -2)$.

11.【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为两直线的夹角.

【应试指导】 直线 l_1 与 l_2 相交所成的锐角或直角叫做 l_1 与 l_2 的夹角, 即 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$, 而选项 C、D 都大于 90° , $\therefore$ C、D 排除,

$\because l_1$ 的斜率不存在, 所以不能用 $\tan \theta = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} \right|$ 求夹角, 可画图观察出 $\theta = 60^\circ$.



11 题答案图

12.【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为向量的夹角.

【应试指导】 求 $\cos \langle a, b \rangle$, 可直接套用公式 $\cos \langle a, b \rangle = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}$.

$a \cdot b = (3, 4) \cdot (0, -2) = 3 \times 0 + 4 \times (-2) = -8$,

$\cos \langle a, b \rangle = \frac{-8}{\sqrt{3^2 + 4^2} \cdot \sqrt{0^2 + (-2)^2}} = -\frac{8}{10} = -\frac{4}{5}$.

二、填空题

13.【答案】 $y^2 = \pm 6x$

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为抛物线的方程.

【应试指导】 设抛物线的方程为 $y^2 = \pm 2px$, 则焦点 $F(\pm \frac{p}{2}, 0)$, 所以有 $(\frac{6}{2})^2 = \pm 2p(\pm \frac{p}{2})$, 得 $p = \pm 3$,

故抛物线方程为 $y^2 = \pm 6x$.

14.【答案】 $[\frac{1}{2}, 3]$

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为函数的值域.

【应试指导】 $\because x^2 + y^2 \geq 1$, 令 $x = \cos \alpha, y = \sin \alpha$,

则 $x^2 - xy + y^2 = 1 - \cos \alpha \sin \alpha = 1 - \frac{\sin 2\alpha}{2}$,

当 $\sin 2\alpha = 1$ 时, $1 - \frac{\sin 2\alpha}{2} = \frac{1}{2}$, $x^2 - xy + y^2$ 取到最小值 $\frac{1}{2}$.

同理: $x^2 + y^2 \leq 2$, 令 $x = \sqrt{2} \cos \beta, y = \sqrt{2} \sin \beta$,

则 $x^2 - xy + y^2 = 2 - 2\cos \beta \sin \beta = 2 - \sin 2\beta$,

当 $\sin 2\beta = -1$ 时, $x^2 - xy + y^2$ 取到最大值 3.

15.【答案】 2

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为函数图像与坐标轴的交点.

【应试指导】 当 $x = 0$ 时, $y = 2^0 - 2 = -1$, 故函数与 y 轴交于 $(0, -1)$ 点; 令 $y = 0$, 则有 $2^x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$,

故函数与 x 轴交于 $(1, 0)$ 点, 因此函数 $y = 2^x - 2$ 与坐标轴的交点共有 2 个.

三、解答题

16. 利润 = 收入 - 成本,

$$L(x) = R(x) - C(x) = -\frac{4}{9}x^2 + 130x - 206 - (50x + 100) = -\frac{4}{9}x^2 + 80x - 306.$$

法一: 用二次函数 $y = ax^2 + bx + c$, 当 $a < 0$ 时有最大值.

$$\because a = -\frac{4}{9} < 0,$$

$\therefore y = -\frac{4}{9}x^2 + 80x - 306$ 是开口向下的抛物线, 有最大值,

$$\text{当 } x = -\frac{b}{2a} \text{ 时, 即 } x = -\frac{80}{2 \times (-\frac{4}{9})} = 90 \text{ 时,}$$

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a},$$

$$\text{可知 } y = \frac{4 \times (-\frac{4}{9}) \times (-306) - 80^2}{4 \times (-\frac{4}{9})} = 3294.$$

法二: 用导数来求解.

$$\because L(x) = -\frac{4}{9}x^2 + 80x - 306,$$

$$\text{求导 } L'(x) = -\frac{4}{9} \times 2x + 80,$$

令 $L'(x) = 0$, 求出驻点 $x = 90$.

$\because x = 90$ 是函数在定义域内唯一驻点,

$\therefore x = 90$ 是函数的极大值点, 也是函数的最大值点, 其最大值为 $L(90) = 3294$.

17. 如图,

$$\because \angle C = 180^\circ - 30^\circ - 75^\circ = 75^\circ,$$

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰三角形, 则 $AC = AB = 120\text{m}$,

过 C 作 $CD \perp AB$, 则由 $\text{Rt}\triangle ACD$ 可求得 $CD = \frac{1}{2}AC = 60\text{m}$.

即河的宽为 60 m.

18. 由椭圆方程可知, 当 $|m| \leq 3$ 时, 存在过点 $(0, m)$ 的两条互相垂直的直线, 都与椭圆有公共点.

当 $|m| > 3$ 时, 设 l_1, l_2 是过 $(0, m)$ 的两条互相垂直的直线,

如果它们都与椭圆有公共点, 则它们都不可能与坐标轴平行,

$$\text{设方程 } l_1: y = kx + m, l_2: y = -\frac{1}{k}x + m,$$

l_1 与椭圆有公共点的充要条件是

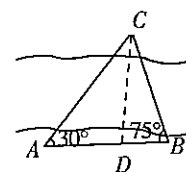
$$\frac{x^2}{16} + \frac{(kx + m)^2}{9} = 1,$$

$$\text{即 } (9 + 16k^2)x^2 + 32kmx + 16m^2 - 144 = 0 \text{ 有实根,}$$

$$\text{即 } (16km)^2 - (9 + 16k^2)(16m^2 - 144) \geq 0.$$

$$\text{得 } k^2 \geq \frac{m^2 - 9}{16}.$$

同理, l_2 与椭圆有公共点的充要条件是 $\frac{1}{k^2} \geq \frac{m^2 - 9}{16}, (\frac{m^2 - 9}{16})^2 \leq 1$, 即 $|m| \leq 5$.



17 题答案图



绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试高起点数学(理工农医类)

全真模拟(五)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分。满分150分。考试时间120分钟。

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第Ⅰ卷(选择题,共84分)

得分	评卷人

一、选择题(本大题共12小题,每小题7分,共84分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

- 已知集合 $A = \{x | -4 \leq x < 2\}$, $B = \{x | -1 < x \leq 3\}$, 那么集合 $A \cap B =$ 【 】
 A. $\{x | -4 < x < 3\}$ B. $\{x | -4 \leq x \leq 3\}$
 C. $\{x | -1 < x < 2\}$ D. $\{x | -1 \leq x \leq 2\}$
- 已知 $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2}$ ($x > 0$), 则 $f(x) =$ 【 】
 A. $\frac{1 - \sqrt{x^2 + 1}}{x}$ B. $\frac{1 + \sqrt{x^2 - 1}}{x}$
 C. $\frac{1 - \sqrt{x^2 - 1}}{x}$ D. $\frac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x}$
- 若函数 $y = f(x)$ 的定义域是 $[-1, 1)$, 那么 $f(2x-1)$ 的定义域是 【 】
 A. $[0, 1)$ B. $[-3, 1)$
 C. $[-1, 1)$ D. $[-1, 0)$
- 设 $0 < a < b < 1$, 则下列正确的是 【 】
 A. $a^a > b^a$ B. $4^{-a} < 4^{-b}$
 C. $\log_a b < \log_a a$ D. $\log_a 4 > \log_a 4$
- 下列函数中, 为偶函数的是 【 】
 A. $y = \log_2 x$ B. $y = x^2$
 C. $y = \frac{4}{x}$ D. $y = x^2 + x$

6. $x = 45^\circ$ 是 $\tan x = 1$ 的 【 】

- A. 充分但非必要条件 B. 必要但非充分条件
 C. 充要条件 D. 既非充分又非必要条件

7. 函数 $y = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ 的最大值是 【 】

- A. 1 B. 2
 C. $\sqrt{2}$ D. $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

8. 如果不共线的向量 a 和 b 有相等的长度, 则 $(a+b)(a-b) =$ 【 】

- A. 0 B. 1
 C. -1 D. 2

9. 过点 $(0, 1)$ 且与直线 $x + y + 1 = 0$ 垂直的直线方程为 【 】

- A. $y = x + 1$ B. $y = 2x + 1$
 C. $y = x$ D. $y = x - 1$

10. 圆柱的轴截面面积等于10, 体积为 5π , 它的母线长和侧面积分别是 【 】

- A. 5 和 10π B. 5π 和 10
 C. 5 和 25π D. 10 和 10π

11. 过点 $P(5, 0)$ 与圆 $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$ 相切的直线方程是 【 】

- A. $y = 5$ B. $x = 5$
 C. $y = -5$ D. $x = -5$

12. 参数方程 $\begin{cases} x = \cos\varphi \\ y = \sin\varphi \end{cases}$ (φ 为参数) 表示的图形为 【 】

- A. 直线 B. 圆
 C. 椭圆 D. 双曲线

第Ⅱ卷(非选择题,共66分)

得分	评卷人

二、填空题(本大题共3小题,每小题7分,共21分)

- $f(u) = u - 1$, $u = \varphi(x) = \lg x$, 则 $f[\varphi(10)] =$.
- 已知 $A(2, 1)$, $B(3, -9)$, 直线 $l: 5x + y - 7 = 0$ 与直线 AB 交于 P 点, 点 P 分 AB 所成的比为 .
- 圆心在 y 轴上, 且与直线 $x + y - 3 = 0$ 及 $x - y - 1 = 0$ 都相切的圆的方程为 .

得 分	评卷人

三、解答题(本大题共3小题,每小题15分,共45分.解答应写出推理、演算步骤)

16. (本小题满分15分)

设函数 $f(x) = e^x - x - 1$.

(I) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 求 $f(x)$ 的极值.

17. (本小题满分15分)

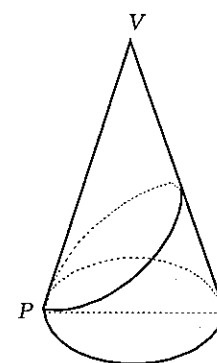
从椭圆上 $x^2 + 2y^2 = 2$ 的右焦点引一条倾斜 45° 的直线,以这条直线与椭圆的两个交点 P 、 Q 及椭圆中心 O 为顶点,组成 $\triangle OPQ$.

(I) 求 $\triangle OPQ$ 的周长;

(II) 求 $\triangle OPQ$ 的面积.

18. (本小题满分15分)

已知正圆锥的底面半径是1cm,母线为3cm, P 为底面圆周上一点,由 P 绕过圆锥回到 P 点的最短路径如图所示,由顶点 V 到这条路线的最小距离是多少?



参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为集合的运算.

【应试指导】 $A \cap B = \{x | -4 \leq x < 2\} \cap \{x | -1 < x \leq 3\} = \{x | -1 < x < 2\}$.

2.【答案】D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为函数的解析式.

【应试指导】 $\because f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2}$, 令 $\frac{1}{x} = t$, 则 $x = \frac{1}{t}$,

$$f(t) = \frac{1}{t} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{t}\right)^2} = \frac{1}{t} + \sqrt{\frac{t^2 + 1}{t^2}} = \frac{1}{t} + \frac{\sqrt{1+t^2}}{t} = \frac{1 + \sqrt{1+t^2}}{t},$$

函数与用哪个英文字母无关, 只与对应法则、定义域有关.

3.【答案】A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为函数的定义域.

【应试指导】 由已知, 得 $-1 \leq 2x-1 < 1, 0 \leq 2x < 2$, 故求定义域为 $0 \leq x < 1$.

4.【答案】D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为指数函数与对数函数的性质.

【应试指导】 A 错, $\because 0 < a < b < 1, a^4 < b^4$.

B 错, $\because 4^{-a} = \frac{1}{4^a}, 4^{-b} = \frac{1}{4^b}, 4^b > 4^a, \therefore 4^{-a} > 4^{-b}$.

C 错, $\because \log_4 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数,

$\therefore \log_4 b > \log_4 a$.

D 对, $\because 0 < a < b < 1, \log_a x$ 为减函数, 对大底小.

5.【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为偶函数的性质.

【应试指导】 A 项, $\log_2 x \neq \log_2(-x)$, 故 A 项不是偶函数; C 项, $\frac{4}{x} \neq \frac{4}{-x}$, 故 C 项不是偶函数; D 项, $x^2 + x \neq$

$(-x)^2 - x$, 故 D 项也不是偶函数; 而 B 项中 $x^2 = (-x)^2$, 故 B 项是偶函数.

6.【答案】A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为简易逻辑.

【应试指导】 $\because x = 45^\circ \Rightarrow \tan x = 1, \therefore x = 45^\circ$ 是 $\tan x = 1$ 的充分条件, 又 $\because \tan x = 1 \Rightarrow x = 45^\circ + k \cdot 180^\circ$, 不一定能推出 $x = 45^\circ, \therefore x = 45^\circ$ 是 $\tan x = 1$ 的充分但非必要条件.

7.【答案】A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为三角函数的最值.

【应试指导】 $\because y = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 2\cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right]\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \cdot$

$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = \cos 2x, \therefore y_{\max} = 1.$

注: 求三角函数的最值时, 应先将函数转化为 $\sin x$ 或 $\cos x$ 的函数, 再讨论函数的取值情况.

8.【答案】A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为向量的运算.

【应试指导】 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 = |a|^2 - |b|^2, \because |a| = |b|, \therefore |a|^2 - |b|^2 = 0.$

9.【答案】A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为直线的性质.

【应试指导】 与直线 $x+y+1=0$ 垂直的直线的斜率为 1, 又因为该直线过 $(0,1)$ 点, 故该直线方程为 $y-1 = 1 \times (x-0) \Rightarrow y = x+1.$

10.【答案】A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为圆柱的母线长和侧面积.

【应试指导】 求母线的长, 可从圆柱的截面积中求出. 如图,

$$S_{\text{截面}} = 2r \cdot L = 10,$$

$$rL = 5, \quad \text{①}$$

$$V = \pi r^2 \cdot L = 5\pi \Rightarrow r^2 L = 5, \quad \text{②}$$

$$\frac{\text{②}}{\text{①}} = \frac{r^2 L}{rL} = 1 \Rightarrow r = 1,$$

$$\therefore L = 5, S_{\text{侧}} = 2\pi r \cdot L = 2\pi \times 1 \times 5 = 10\pi.$$

11.【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为圆的切线.

【应试指导】 将圆的一般方程配方得出圆的标准方程.

$$\because x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 9 = 3^2,$$

则点 $P(5,0)$ 与圆上只有一条切线(如图), 即 $x = 5$.

12.【答案】B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为参数方程.

【应试指导】 $\because$ 在 $\cos \varphi, \sin \varphi$ 中 φ 为参数, 消去 φ 得, $x^2 + y^2 = 1$,

即半径为 1 的圆, 圆心在原点.

二、填空题

13.【答案】0

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为复合函数求值.

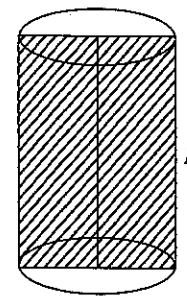
【应试指导】 $\because \varphi(x) = \lg x,$

$$\therefore \varphi(10) = \lg 10 = 1,$$

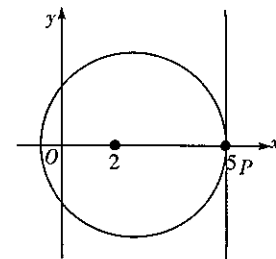
$$\therefore f[\varphi(10)] = \varphi(10) - 1 = 1 - 1 = 0.$$

14.【答案】4

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为线段的定比分点.



10 题答案图



11 题答案图

【应试指导】由直线方程的两点式可得,过 $A(2,1),B(3,-9)$ 的方程为:

$$L_{AB}: \frac{x-2}{3-2} = \frac{y-1}{-9-1}, \text{ 则 } \begin{cases} 10x+y-21=0 \\ 5x+y-7=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{14}{5} \\ y=-7 \end{cases}$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = \frac{2 + \lambda \cdot 3}{1 + \lambda}, \text{ 即 } \frac{14}{5} = \frac{2 + 3\lambda}{1 + \lambda} \Rightarrow \lambda = 4.$$

15. 【答案】 $x^2 + (y-1)^2 = 2$

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为圆的切线的性质.

【应试指导】 设圆的方程为 $(x-0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$, (如图)

圆心为 $O'(0, y_0)$.

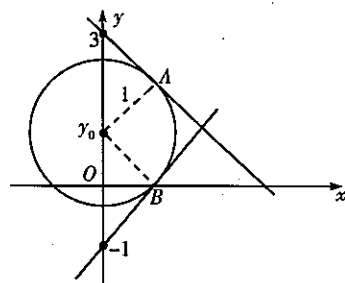
$|O'A| = |O'B|$, 即

$$\frac{|0 + y_0 - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|0 - y_0 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}},$$

$$|y_0 - 3| = |-y_0 - 1| \Rightarrow y_0 = 1,$$

$$r = \frac{|0 + 1 - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},$$

$$\therefore x^2 + (y-1)^2 = 2.$$



15 题答案图

三、解答题

16. (I) 函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$,

$$f'(x) = (e^x - x - 1)' = e^x - 1,$$

$$\text{令 } f'(x) = 0, e^x - 1 = 0, \text{ 得 } x = 0,$$

当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f'(x) < 0$,

$x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 内单调减少, 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加.

(II) $f(0) = e^0 - 0 - 1 = 1 - 1 = 0$,

又 $\because f(x)$ 在 $x = 0$ 左侧单调减少, 在 $x = 0$ 右侧单调增加,

$\therefore x = 0$ 为极小值点, 且 $f(x)$ 的极小值为 0.

17. 椭圆方程变形为 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1$ (如图),

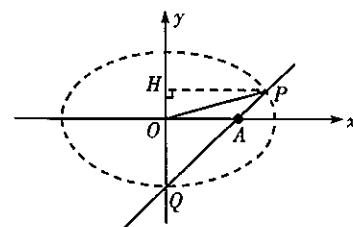
$$\therefore a^2 = 2, b^2 = 1,$$

$$\because c^2 = a^2 - b^2, \therefore c = 1,$$

直线方程为: $y = x - 1$,

直线方程与椭圆方程联立:

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{交点为 } P\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right), Q(0, -1),$$



17 题答案图

(I) $\triangle OPQ$ 的周长 $= |OQ| + |OP| + |PQ|$

$$= 1 + \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3} + 1\right)^2}$$

$$= 1 + \sqrt{\frac{17}{9}} + \sqrt{\frac{32}{9}} = 1 + \frac{\sqrt{17}}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$= \frac{1}{3}(3 + \sqrt{17} + 4\sqrt{2}).$$

(II) 作 $PH \perp y$ 轴, 则 $PH = \frac{4}{3}$,

$$S_{\triangle POQ} = \frac{1}{2} |OQ| \cdot |PH|$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{4}{3}$$

$$= \frac{2}{3}.$$

18. 圆锥的曲面沿着母线剪开, 展开成一个平面 (如图),

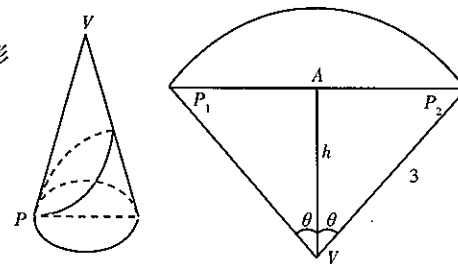
其半径 $VP = 3$, 弧长 $= 2\pi \cdot 1 = 2\pi$ 的扇形,

$\because$ 圆锥的底面半径为 1, 于是围绕圆锥的最短路线对应于扇形内是 P_1 到 P_2 的最短距离, 就是弦 P_1P_2 ,

由 V 到这条路线的最短距离是图中的线段 $h = AV$,

依据弧长公式 $2\pi = 2\theta \cdot 3$,

$$\text{得 } \theta = \frac{\pi}{3}, \therefore h = 3\cos\theta = 3 \times \cos\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}.$$



18 题答案图



绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试高起点数学(理工农医类)

全真模拟(六)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分。满分150分。考试时间120分钟。

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第Ⅰ卷(选择题,共84分)

得分	评卷人

一、选择题(本大题共12小题,每小题7分,共84分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义,则下列函数中必为偶函数的是 【 】
 A. $y = |f(x)|$ B. $y = -|f(x)|$
 C. $y = xf(x)$ D. $y = f(x) + f(-x)$
2. 在 $\triangle ABC$ 中,若 $b = 2\sqrt{2}$, $c = \sqrt{6} + \sqrt{2}$, $\angle B = 45^\circ$,则 a 等于 【 】
 A. 2 B. 2 或 $2\sqrt{3}$
 C. $2\sqrt{3}$ D. 无解
3. 设甲: $\Delta > 0$, 乙: $ax^2 + bx + c = 0$ 有两个不相等的实数根,则 【 】
 A. 甲是乙的必要条件,但不是充分条件 B. 甲是乙的充分条件,但不是必要条件
 C. 甲是乙的充分必要条件 D. 甲不是乙的充分条件,也不是必要条件
4. 过点 $P(2, -3)$ 且在两坐标轴上截距相等的直线方程是 【 】
 A. $x + y + 1 = 0$ 或 $3x + 2y = 0$ B. $x - y - 1 = 0$ 或 $3x + 2y = 0$
 C. $x + y - 1 = 0$ 或 $3x + 2y = 0$ D. $x - y + 1 = 0$ 或 $3x + 2y = 0$
5. 曲线 $y = |x|$ 和 $x^2 + y^2 = 4$ 所围成的最小区域的面积是 【 】
 A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{3}{4}\pi$
 C. π D. $\frac{3}{2}\pi$

6. 从椭圆与 x 轴的右交点看短轴两端点的视角为 60° 的椭圆的离心率 【 】

- A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ B. $\frac{1}{2}$
 C. 1 D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

7. 当圆锥的侧面积和底面积的比值是 $\sqrt{2}$ 时,圆锥轴截面的顶角是 【 】

- A. 45° B. 60°
 C. 90° D. 120°

8. 设直线的参数方程为 $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 4 + t \end{cases}$ (t 为参数),则此直线在 y 轴上的截距是 【 】

- A. 5 B. -5
 C. $\frac{5}{2}$ D. $-\frac{5}{2}$

9. 已知 x 轴上的一点 B 与点 $A(5, 12)$ 的距离等于13,则点 B 的坐标为 【 】

- A. (10, 0) B. (0, 0)
 C. (10, 0) 或 (0, 0) D. (-10, 0)

10. 直线 $\sqrt{3}x + y - 2\sqrt{3} = 0$ 截圆 $x^2 + y^2 = 4$ 所得的劣弧所对的圆心角为 【 】

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$
 C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$

11. 在 $\triangle ABC$ 中,若 $a + \frac{1}{a} = b + \frac{1}{b} = c + \frac{1}{c}$,则 $\triangle ABC$ 必是 【 】

- A. 直角三角形 B. 等腰三角形
 C. 等边三角形 D. 钝角三角形

12. 由数字1, 2, 3, 4, 5组成没有重复数字且数字1与2不相邻的五位数有 【 】

- A. 36个 B. 72个
 C. 120个 D. 96个

第 II 卷 (非选择题, 共 66 分)

得 分	评卷人

二、填空题 (本大题共 3 小题, 每小题 7 分, 共 21 分)

13. 已知 $A(-1, -1), B(3, 7)$ 两点, 则线段 AB 的垂直平分线方程为_____.

14. 已知 $5\pi < \alpha < \frac{11}{2}\pi$, 且 $|\cos \alpha| = m$, 则 $\cos \frac{\alpha}{2}$ 的值等于_____.

15. 不等式 $\frac{2x+1}{1-2x} > 0$ 的解集为_____.

得 分	评卷人

三、解答题 (本大题共 3 小题, 每小题 15 分, 共 45 分. 解答应写出推理、演算步骤)

16. (本小题满分 15 分)

已知等差数列前 n 项和 $S_n = 2n^2 - n$.

(I) 求这个数列的通项公式;

(II) 求数列第六项到第十项的和.

17. (本小题满分 15 分)

(I) 求曲线 $y = \ln x$ 在 $(1, 0)$ 点处的切线方程;

(II) 并判定在 $(0, +\infty)$ 上的增减性.

18. (本小题满分 15 分)

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 和圆 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$, M, N 为圆与坐标轴的交点, 求证: 圆的弦 MN 是椭圆的切线.

参考答案及解析

一、选择题

1. 【答案】 D

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为函数的奇偶性.

【应试指导】 考查函数的奇偶性,只需将 $f(x)$ 中的 x 换成 $-x$,计算出 $f(-x)$,然后用奇函数,偶函数定义下结论.对于 A、B、C 项无法判断其奇偶性,而选项 D 有 $y=f(x)+f(-x)$,将 $f(x)$ 中的 x 换写成 $-x$ 有 $f(-x)+f[-(-x)]=f(-x)+f(x)=y$.

2. 【答案】 B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为三角形的解法.

【应试指导】 此题是已知两边和其中一边的对角,解三角形时,会出现一解、两解、无解的情况,要注意这一点.

用余弦定理 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$,可得: $(2\sqrt{2})^2 = a^2 + (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 - 2a(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cos 45^\circ \Rightarrow 8 = a^2 + (8 +$

$$2\sqrt{6} \times \sqrt{2}) - 2(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \frac{\sqrt{2}}{2} a \Rightarrow 0 = a^2 + 2\sqrt{12} - (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \sqrt{2} a \Rightarrow a^2 - (\sqrt{12} + 2)a + 4\sqrt{3} = 0,$$

$$\text{解出 } a = \frac{\sqrt{12} + 2 \pm \sqrt{16 + 4\sqrt{12} - 4 \times 4\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{12} + 2 \pm \sqrt{16 - 8\sqrt{3}}}{2} = \sqrt{3} + 1 \pm (\sqrt{3} - 1) = \begin{cases} 2\sqrt{3} \\ 2 \end{cases}$$

(提示: $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}$)

3. 【答案】 C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为简易逻辑.

【应试指导】 甲: $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 乙: $ax^2 + bx + c = 0$ 有两个不相等的实数根.

4. 【答案】 A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为直线的截距.

【应试指导】 若直线在两坐标轴上截距相等,将直线方程转化为截距式容易判别.

选项 A 对.

选项 B 错,直线 $x - y - 1 = 0$ 不过点 $(2, -3)$.

选项 C 错,直线 $x + y - 1 = 0$ 不过点 $(2, -3)$.

选项 D 错,直线 $x - y + 1 = 0$ 不过点 $(2, -3)$.

5. 【答案】 C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为弧度制的面积公式.

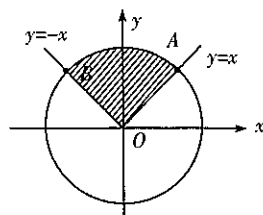
【应试指导】 利用弧度制中的面积公式 $S = \frac{1}{2}L \cdot r$.如图,

$$\because x^2 + y^2 = 4 = 2^2,$$

$$\therefore r = 2.$$

$$\widehat{AB} = L = \frac{1}{4} \cdot 2\pi r,$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \times \frac{2\pi \times 2}{4} \times 2 = \pi.$$



5 题答案图

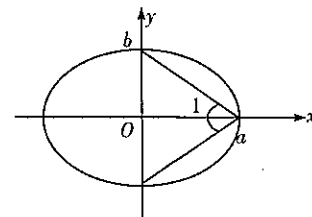
6. 【答案】 A

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为椭圆的离心率.

【应试指导】 求椭圆的离心率,先求出 a, c . (如图)

$$\because \angle 1 = 60^\circ, \therefore b = \frac{\sqrt{3}}{3}a, c = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}a,$$

$$\text{由椭圆定义知 } e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{3}a}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

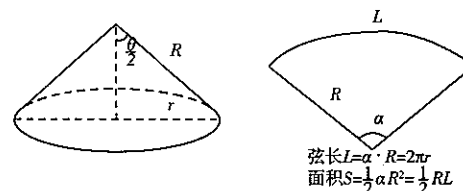


6 题答案图

7. 【答案】 C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为圆锥的轴截面的顶角.

【应试指导】 求圆锥的轴截面的顶角,先画出轴截面(如下图),可知轴截面为等腰三角形,圆锥的侧面是扇形,圆锥底面的周长等于展开侧面的扇形的弧长.



7 题答案图

$$\because S_{\text{侧}} = \frac{1}{2}RL, \text{由已知 } \frac{S_{\text{侧}}}{S_{\text{底}}} = \frac{\frac{1}{2}RL}{\pi r^2} = \frac{\frac{1}{2}R \cdot 2\pi r}{\pi r^2} = \frac{R}{r} = \sqrt{2} \Rightarrow R = \sqrt{2}r,$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{r}{R} = \frac{r}{\sqrt{2}r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{\theta}{2} = 45^\circ, \therefore \theta = 90^\circ.$$

8. 【答案】 C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为直线的参数方程.

【应试指导】 直线的参数方程为 $\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}$,

$$\therefore \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 4 + t \end{cases}, \therefore \begin{cases} x_1 = 3, x_2 = 5 \\ y_1 = 4, y_2 = 5 \end{cases},$$

$$\text{直线两点式方程: } \frac{x-3}{5-3} = \frac{y-4}{5-4} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}, \therefore \text{直线在 } y \text{ 轴上的截距为 } \frac{5}{2}.$$

9. 【答案】 C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为两点间距离公式.

【应试指导】 设 $B(x, 0)$, 由两点间的距离公式得:

$$|\overrightarrow{AB}| = 13 \Rightarrow \sqrt{(x-5)^2 + (0-12)^2} = 13 \Rightarrow (x-5)^2 + 144 = 169 \Rightarrow x-5 = \pm 5 \Rightarrow x = 10 \text{ 或 } x = 0 \Rightarrow B \text{ 点坐标为 } (10, 0) \text{ 或 } (0, 0).$$

10. 【答案】 C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为圆心角.

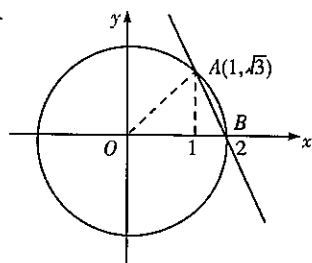
【应试指导】如图,要求圆心角,先找出直线与圆的交点,两个交点之间的劣弧

所对的圆心角即为所求.

$$\begin{cases} y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$A(1, \sqrt{3}), B(2, 0)$, 连接 OA, OB , 则 $\angle AOB$ 为所求的圆心角,

$$\because \tan \angle AOB = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \Rightarrow \angle AOB = 60^\circ = \frac{\pi}{3}.$$



10 题答案图

11. 【答案】 C

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为等式的变换.

【应试指导】 由 $a + \frac{1}{a} = b + \frac{1}{b}$, 得 $(a-b) + \frac{b-a}{ab} = 0$, 则 $(a-b)(1 - \frac{1}{ab}) = 0 \Rightarrow a = b$ 或 $\frac{1}{ab} = 1$.

同理 $b + \frac{1}{b} = c + \frac{1}{c} \Rightarrow b = c$ 或 $\frac{1}{bc} = 1$, $a + \frac{1}{a} = c + \frac{1}{c} \Rightarrow a = c$ 或 $\frac{1}{ac} = 1$. $\therefore a = b = c$.

12. 【答案】 B

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为排列数.

【应试指导】 用间接法计算, 先求出不考虑约束条件的所有排列, 然后减去不符合条件的.

由 1, 2, 3, 4, 5 可组成 P_5^5 个五位数.

1, 2 相邻的有 P_4^4 个, 即把 1, 2 看成一个元素与剩下的 3, 4, 5 共四个元素的排列, 有 P_4^4 个. 但 1 在前或在后又有两个, 共 $2P_4^4$ 个.

所求五位数共有 $P_5^5 - 2P_4^4 = 120 - 2 \times 24 = 120 - 48 = 72$ 个.

二、填空题

13. 【答案】 $x + 2y - 7 = 0$

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为线段的垂直平分线.

【应试指导】 设线段的垂直平分线上任一点为 $P(x, y)$,

则 $|PA| = |PB|$, 即

$$\sqrt{[x - (-1)]^2 + [y - (-1)]^2} = \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 7)^2},$$

整理得, $x + 2y - 7 = 0$.

14. 【答案】 $-\sqrt{\frac{1-m}{2}}$

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为半角公式.

【应试指导】 注意 $\cos \frac{\alpha}{2}$ 的正负.

$\because 5\pi < \alpha < \frac{11}{2}\pi$ ($\alpha \in$ 第三象限角), $\therefore \frac{5\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{11}{4}\pi$ ($\frac{\alpha}{2} \in$ 第二象限角),

故 $\cos \frac{\alpha}{2} < 0$, 又 $\because |\cos \alpha| = m$, $\therefore \cos \alpha = -m$, 则 $\cos \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = -\sqrt{\frac{1 - m}{2}}$.

15. 【答案】 $\{x | -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\}$

【考情点拨】 本题主要考查的知识点为不等式的解集.

【应试指导】 $\frac{2x+1}{1-2x} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x+1 > 0 \\ 1-2x > 0 \end{cases}$ ① 或 $\begin{cases} 2x+1 < 0 \\ 1-2x < 0 \end{cases}$ ②,

① 的解集为 $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$, ② 的解集为 $\emptyset$,

$$\{x | -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\} \cup \emptyset = \{x | -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\}.$$

三、解答题

16. (I) 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1}$

$$= (2n^2 - n) - [2(n-1)^2 - (n-1)]$$

$$= 2n^2 - n - 2n^2 + 4n - 2 + n - 1 = 4n - 3 (n \geq 2),$$

当 $n = 1$ 时, $a_1 = S_1 = 4 \times 1 - 3 = 1$,

$$\therefore a_n = 4n - 3.$$

(II) $S_{10} - S_5 = (2 \times 10^2 - 10) - (2 \times 5^2 - 5)$

$$= 145.$$

17. (I) $y' \Big|_{x=1} = \frac{1}{x} \Big|_{x=1} = 1 \Rightarrow k = 1$, 故所求切线方程为 $y - 0 = k(x - 1) \Rightarrow y = x - 1$.

(II) $\because y' = \frac{1}{x}, x \in (0, +\infty)$, 则 $y' > 0$,

$\therefore y = \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

18. 如右图,

$\because M, N$ 为圆与坐标轴的交点, 不妨取 M, N 在 y, x 轴的正方向,

$\therefore M(0, \sqrt{a^2 + b^2}), N(\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$,

由直线的截距式可知, 弦 MN 的方程为:

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{y}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1.$$

直线方程与椭圆方程联立得

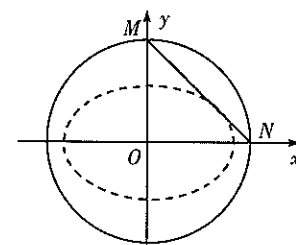
$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{y}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases},$$

可得 $(a^2 + b^2)x^2 - 2a^2 \cdot \sqrt{a^2 + b^2}x + a^4 = 0$,

而 $\Delta = (2a^2 \sqrt{a^2 + b^2})^2 - 4(a^2 + b^2)a^4 = 0$,

可知二次方程有两个相等实根, 因而 MN 是椭圆的切线.

同理, 可证其他 3 种情况弦 MN 仍是椭圆的切线.



18 题答案图