



绝密★启用前

2024 年成人高等学校招生全国统一考试专升本

高等数学(二)



扫描二维码
获取视频和试题

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,满分 150 分,考试时间 150 分钟。

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第 I 卷(选择题,共 84 分)

得分	评卷人

一、选择题(1~12 小题,每小题 7 分,共 84 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{x} = 2$, 则 $m =$ 【 】
A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2
2. 设 $y = \ln x + x^2$, 则 $y' =$ 【 】
A. $\frac{1}{x} + 2x$ B. $\frac{1}{x} - 2x$ C. $\ln x + 2x$ D. $\ln x - 2x$
3. 设 $y = xe^{2x}$, 则 $y' =$ 【 】
A. $(1+x)e^{2x}$ B. $(1+2x)e^{2x}$ C. $2xe^{2x}$ D. $(1-2x)e^{2x}$
4. 设随机变量 X 的概率分布为

X	3	4	5
P	0.1	a	0.6

- 则 $a =$ 【 】
A. 0.1 B. 0.2 C. 0.3 D. 0.4
5. 曲线 $y = xe^{-x}$ 的拐点坐标为 【 】
A. (0,0) B. $(2, 2e^{-2})$ C. $(-1, -e)$ D. $(1, e^{-1})$
6. 设 $f(x)$ 的一个原函数为 e^{x^2} , 则 $f(x) =$ 【 】
A. e^{x^2} B. $2xe^{x^2}$ C. xe^{x^2} D. $2e^{x^2}$

7. $\int_{-1}^1 (\arctan x + x^2) dx =$ 【 】
A. $\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. 0
8. $\int_0^{\pi^2} \cos \sqrt{x} dx =$ 【 】
A. -4 B. -2 C. 0 D. 2
9. $\int \frac{(x+1)^2}{x} dx =$ 【 】
A. $x^2 + x + \ln |x| + C$ B. $x^2 + 2x + \ln |x| + C$
C. $\frac{x^2}{2} + x + \ln |x| + C$ D. $\frac{x^2}{2} + 2x + \ln |x| + C$
10. 设 $z = 2xy + \frac{x}{y}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} =$ 【 】
A. $2x + \frac{1}{y}$ B. $2y + \frac{1}{y}$
C. $2x + \frac{x}{y^2}$ D. $2x - \frac{x}{y^2}$
11. 设 $z = xf(y)$, 其中 f 可导, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ 【 】
A. $f'(y)$ B. x C. $f(y)$ D. $xf(y)$
12. 设 A, B 为随机事件, 则 $P(A-B) = P(A) - P(B)$ 的充要条件是 【 】
A. $A \subset B$ B. $P(B-A) = 0$
C. $A = B$ D. $P(A-B) = 0$

第 II 卷(非选择题,共 66 分)

得分	评卷人

二、填空题(13~15 小题,每小题 7 分,共 21 分)

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x}, & x \geq 1, \\ a \cos \pi x, & x < 1 \end{cases}$ 在 $x = 1$ 处连续, 则 $a =$ _____.
14. 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2a}{x-a} \right)^x = e^6$, 则 $a =$ _____.
15. 曲线 $y = x^3$ 在点 (1,1) 处法线的方程为 _____.

得 分	评卷人

三、解答题(16~18 题,每小题 15 分,共 45 分.解答应写出推理、演算步骤)

16.(本题满分 15 分)

求函数 $f(x) = x^2(x-1)^2$ 的单调区间和极值.

17.(本题满分 15 分)

计算 $\int \sin^2 x dx$.

18. (本题满分 15 分)

求由抛物线 $y^2 = 2x$ 和直线 $x + y - 4 = 0$ 所围成的图形的面积.

参考答案及解析

一、选择题

1. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了等价无穷小代换的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{x} = m = 2.$

2. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了导数的计算的知识点.

【应试指导】 $y' = (\ln x + x^2)' = \frac{1}{x} + 2x.$

3. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了函数的求导法则的知识点.

【应试指导】 $y' = (xe^{2x})' = e^{2x} + x(e^{2x})' = (1 + 2x)e^{2x}.$

4. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了概率分布的性质的知识点.

【应试指导】 $0.1 + a + 0.6 = 1$, 所以 $a = 0.3$.

5. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了函数的拐点的知识点.

【应试指导】 $y' = (xe^{-x})' = (1 - x)e^{-x}, y'' = (x - 2)e^{-x}$. 令 $y'' = 0$, 得 $x = 2$. 当 $x < 2$ 时, $y'' < 0$; 当 $x > 2$ 时, $y'' > 0$. 所以, 拐点为 $(2, 2e^{-2})$.

6. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了原函数的概念的知识点.

【应试指导】 $f(x) = (e^{x^2})' = e^{x^2} (x^2)' = 2xe^{x^2}.$

7. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了定积分的性质和计算的知识点.

【应试指导】 原式 $= \int_{-1}^1 \arctan x dx + \int_{-1}^1 x^2 dx = 0 + 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$

8. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了用换元法计算定积分的知识点.

【应试指导】 令 $\sqrt{x} = t$, 则 $x = t^2, dx = 2t dt$. 当 $x = 0$ 时, $t = 0$; 当 $x = \pi^2$ 时, $t = \pi$. $\int_0^{\pi^2} \cos \sqrt{x} dx = 2 \int_0^{\pi} t \cos t dt =$

$2 \int_0^{\pi} t \sin t dt = 2 \left(t \sin t \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin t dt \right) = 2 \cos t \Big|_0^{\pi} = -4.$

9.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了不定积分的计算的知识点.

【应试指导】 $\int \frac{(x+1)^2}{x} dx = \int \left(x+2+\frac{1}{x}\right) dx = \frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x| + C.$

10.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了偏导数的计算的知识点.

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x - \frac{x}{y^2}.$

11.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了二阶偏导数的计算的知识点.

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial x} = f(y), \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f'(y).$

12.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了概率的性质的知识点.

【应试指导】 $P(A-B) = P(A) - P(AB)$, 故 $P(A-B) = P(A) - P(B)$ 的充要条件是 $P(AB) = P(B)$, 即

$B \subset A$, 故 $P(B-A) = 0$.

二、填空题

13.【答案】 -2

【考情点拨】 本题考查了连续函数的性质的知识点.

【应试指导】 因为 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续, 所以 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$, 而 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} a \cos \pi x = -a$,

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{x} = 2$, 故有 $-a = 2$, 即 $a = -2$.

14.【答案】 2

【考情点拨】 本题考查了两个重要极限的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3a}{x-a}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}}\right]^{\frac{3ax}{x-a}} = e^{3a} = e^6$, 故 $a = 2$.

15.【答案】 $x+3y-4=0$

【考情点拨】 本题考查了法线方程的知识点.

【应试指导】 $y' = 3x^2$, 则 $k_{\text{切}} = 3x^2 \Big|_{x=1} = 3$, 故 $k_{\text{法}} = -\frac{1}{3}$, 则法线方程为 $y-1 = -\frac{1}{3}(x-1)$, 化简为 $x+$

$3y-4=0$.

三、解答题

16. $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

因为 $f(x) = x^2(x-1)^2 = x^4 - 2x^3 + x^2$, 则

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x$$

$$= 2x(2x^2 - 3x + 1)$$

$$= 2x(x-1)(2x-1),$$

令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = 1$.

列表:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	极小值 $f(0) = 0$	$\nearrow$	极大值 $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{16}$	$\searrow$	极小值 $f(1) = 0$	$\nearrow$

所以, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, \frac{1}{2}), (1, +\infty)$; 单调递减区间为 $(-\infty, 0), (\frac{1}{2}, 1)$.

极大值为 $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{16}$, 极小值为 $f(0) = f(1) = 0$.

$$17. \int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx$$

$$= \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

$$18. \text{联立} \begin{cases} y^2 = 2x, \\ x + y - 4 = 0, \end{cases} \text{解得交点 } (2, 2), (8, -4).$$

所以所求平面图形的面积为

$$S = \int_{-4}^2 \left(4 - y - \frac{y^2}{2}\right) dy$$

$$= \left(4y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6}\right) \Big|_{-4}^2$$

$$= 18.$$



绝密★启用前

2023 年成人高等学校招生全国统一考试专升本

高等数学(二)



扫描二维码
获取视频和试题

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,满分 150 分,考试时间 150 分钟。

题 号	一	二	三	总 分	统分人签字
分 数					

第Ⅰ卷(选择题,共 40 分)

得 分	评卷人

一、选择题(1~10 小题,每小题 4 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 + x} =$

- A. -1 B. 0 C. $\frac{1}{2}$ D. 1

2. 设函数 $f(x) = x^3 + 5\sin x$, 则 $f'(0) =$

- A. 5 B. 3 C. 1 D. 0

3. 设函数 $f(x) = \ln x - x$, 则 $f'(x) =$

- A. x B. $x - 1$ C. $\frac{1}{x}$ D. $\frac{1}{x} - 1$

4. 函数 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 3$ 的单调递减区间是

- A. $(3, +\infty)$ B. $(-\infty, +\infty)$ C. $(-\infty, 0)$ D. $(0, 3)$

5. $\int x^{\frac{2}{3}} dx =$

- A. $x^{\frac{2}{3}} + C$ B. $\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$ C. $x^{\frac{5}{3}} + C$ D. $x^{\frac{1}{3}} + C$

6. 设函数 $f(x) = |x|$, 则 $\int_{-1}^1 f(x) dx =$

- A. -2 B. 0 C. 1 D. 2

7. 设 $f(x)$ 为连续函数, 且满足 $\int_0^x f(t) dt = e^x - 1$, 则 $f(x) =$

- A. e^x B. $e^x - 1$ C. $e^x + 1$ D. $x + 1$

8. 设 $z = e^{xy}$, 则 $dz =$

- A. $e^{xy} dx + e^{xy} dy$ B. $e^x dx + e^y dy$ C. $ye^{xy} dx + xe^{xy} dy$ D. $e^y dx + e^x dy$

9. 设 $z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$

- A. $\frac{x}{2}$ B. 0 C. $\frac{y}{2}$ D. $x + y$

10. 投掷一枚均匀硬币 5 次, 其中恰有 3 次正面朝上的概率是

- A. $\frac{11}{16}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{5}{16}$

第Ⅱ卷(非选择题,共 110 分)

得 分	评卷人

二、填空题(11~20 小题,每小题 4 分,共 40 分)

11. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{1+x} - 2}{x - 3} =$

12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x =$

13. 设函数 $f(x) = e^{2x}$, 则 $f^{(n)}(0) =$

14. 设函数 $f(x) = x^2 - 2x + 4$, 曲线 $y = f(x)$ 在 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线与直线 $y = x - 1$ 平行, 则 $x_0 =$

15. 曲线 $y = xe^x$ 的拐点坐标为

16. 曲线 $y = \frac{2x}{1+x^2}$ 的渐近线方程为

17. $\int \frac{x}{x^2 + 4} dx =$

18. 由曲线 $y = x^2, x = y^2$ 所围成的平面图形的面积为

19. $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx =$

20. 函数 $z = x^2 + y^2 - x - y - xy$ 的驻点坐标为

得 分	评卷人

三、解答题(21~28题,共70分.解答应写出推理、演算步骤)

21.(本题满分8分)

计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

22.(本题满分8分)

设 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, 求 dy .

23.(本题满分8分)

计算 $\int x^2 \cos x dx$.

24.(本题满分8分)

计算 $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx$.

25.(本题满分8分)

盒中有5个球,其中3个白球,2个黑球,从中随机一次抽取3个球,用 X 表示抽取到的白球的个数.

(1) 求随机变量 X 的概率分布;

(2) 求 X 的数学期望 $E(X)$.

26.(本题满分10分)

要做一个容积为 V 立方米的密闭圆柱形容器,两底面材料的价格为每平方米 a 元,侧面材料的价格为每平方米 b 元,问圆柱形容器的底面半径与高的比等于多少时,造价最低?

27. (本题满分 10 分)

证明: 当 $x \geq 0$ 时, $\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$.

28. (本题满分 10 分)

设函数 $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^n + y^n)$, n 为大于 1 的整数. 求在条件 $x + y = c$ 下 $f(x, y)$ 的最小值, 其中 $x > 0, y > 0, c$ 为正常数.

参考答案及解析

一、选择题

1. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了函数极限的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = 1$.

2. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了导数的知识点.

【应试指导】 可求得 $f'(x) = 3x^2 + 5\cos x$, 则 $f'(0) = 5$.

3. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了导数运算的知识点.

【应试指导】 $f'(x) = (\ln x - x)' = \frac{1}{x} - 1$.

4. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了单调区间的知识点.

【应试指导】 由题可得 $f'(x) = 6x^2 - 18x = 6x(x - 3)$, 令 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < 3$, 故单调减区间为 $(0, 3)$.

5. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + C$.

6. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了定积分的性质的知识点.

【应试指导】 $\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 (-x) dx + \int_0^1 x dx = -\frac{1}{2} x^2 \Big|_{-1}^0 + \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 = 1$.

7. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了变上限积分的性质的知识点.

【应试指导】 $\int_0^x f(t) dt = e^x - 1$ 两边同时求导, 得 $f(x) = (e^x - 1)' = e^x$.

8. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了全微分的知识点.

【应试指导】 $dz = de^y = e^y d(xy) = e^y (y dx + x dy)$.

9. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了二阶偏导数的知识点.

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2} x$, 所以 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$.

10. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了独立重复试验的概率的知识点.

【应试指导】 恰有 3 次正面朝上的概率为 $C_3^5 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{16}$.

二、填空题

11. 【答案】 $\frac{1}{4}$

【考情点拨】 本题考查了函数极限的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{1+x} - 2}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{(x - 3)(\sqrt{1+x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{1+x} + 2} = \frac{1}{4}$.

12.【答案】 e^2

【考情点拨】 本题考查了两个重要极限的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{x-1} \right)^{\frac{x-1}{2}} \right]^{\frac{2x}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x-1}} = e^2$.

13.【答案】 2^n

【考情点拨】 本题考查了高阶导数的知识点.

【应试指导】 因为 $f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}$, 故 $f^{(n)}(0) = 2^n$.

14.【答案】 $\frac{3}{2}$

【考情点拨】 本题考查了导数的几何意义的知识点.

【应试指导】 $f'(x) = 2x - 2$, 故 $f'(x_0) = 2x_0 - 2$, 由于切线与直线 $y = x - 1$ 平行, 故 $f'(x_0) = 1$, 得 $x_0 = \frac{3}{2}$.

15.【答案】 $(-2, -2e^{-2})$

【考情点拨】 本题考查了拐点的知识点.

【应试指导】 $y' = (1+x)e^x$, $y'' = (2+x)e^x$, 令 $y'' = 0$, 得 $x = -2$. 当 $x < -2$ 时, $y'' < 0$; 当 $x > -2$ 时, $y'' > 0$. 故拐点为 $(-2, -2e^{-2})$.

16.【答案】 $y = 0$

【考情点拨】 本题考查了渐近线的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{1+x^2} = 0$, 故曲线有水平渐近线 $y = 0$.

17.【答案】 $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的计算的知识点.

【应试指导】 $\int \frac{x}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2 + 4} d(x^2 + 4) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + C$.

18.【答案】 $\frac{1}{3}$

【考情点拨】 本题考查了平面图形面积的知识点.

【应试指导】 该平面图形面积为 $S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$.

19.【答案】 $\frac{1}{2}$

【考情点拨】 本题考查了反常积分的计算的知识点.

【应试指导】 $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} d(-x^2) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{2} (\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} - 1) = \frac{1}{2}$.

20.【答案】 $(1, 1)$

【考情点拨】 本题考查了驻点的知识点.

【应试指导】 由定义, 令 $\begin{cases} z_x = 2x - 1 - y = 0 \\ z_y = 2y - 1 - x = 0 \end{cases}$, 解得 $x = 1, y = 1$, 故所求驻点为 $(1, 1)$.

三、解答题

21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$.

22. $y' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} (x + \sqrt{x^2 + 1})'$
 $= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}},$$

$$\text{所以 } dy = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

$$23. \int x^2 \cos x dx = \int x^2 d \sin x$$

$$= x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx$$

$$= x^2 \sin x + 2(x \cos x - \int \cos x dx)$$

$$= x^2 \sin x + 2(x \cos x - \sin x) + C.$$

$$24. \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} d(1-x^2)$$

$$= -\frac{1}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

25. (1) X 的可能取值为 1, 2, 3.

$$P\{X=1\} = \frac{C_3^1 C_2^2}{C_5^3} = \frac{3}{10},$$

$$P\{X=2\} = \frac{C_3^2 C_2^1}{C_5^3} = \frac{3}{5},$$

$$P\{X=3\} = \frac{C_3^3}{C_5^3} = \frac{1}{10}.$$

故 X 的概率分布为

X	1	2	3
P	0.3	0.6	0.1

$$(2) E(X) = 1 \times 0.3 + 2 \times 0.6 + 3 \times 0.1 = 1.8.$$

26. 设底面半径和高分别为 r, h . 则造价函数 $L = 2a\pi r^2 + 2b\pi rh$, 且 $\pi r^2 h = V$.

$$\text{将 } h = \frac{V}{\pi r^2} \text{ 代入 } L \text{ 中, 得 } L = 2a\pi r^2 + \frac{2bV}{r}.$$

$$\text{令 } L' = 4a\pi r - \frac{2bV}{r^2} = 0, \text{ 得 } 2a\pi r^3 = bV,$$

$$\text{则有 } 2a\pi r^3 = b\pi r^2 h, \text{ 即 } 2ar = bh, \text{ 解得 } \frac{r}{h} = \frac{b}{2a}.$$

由实际问题的意义知, 当底面半径与高的比为 $\frac{b}{2a}$ 时, 造价最低.

$$27. \text{令 } f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}, \text{ 则 } f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x},$$

当 $x \geq 0$ 时, $f'(x) \geq 0$. 因此, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x)$ 为单调增函数.

$$\text{故有 } f(x) \geq f(0) = 0. \text{ 故当 } x \geq 0 \text{ 时, } \ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}.$$

$$28. \text{令 } L(x, y, \lambda) = \frac{1}{2}(x^n + y^n) + \lambda(x + y - c),$$

$$\text{则 } \begin{cases} L_x = \frac{1}{2} n x^{n-1} + \lambda = 0, \\ L_y = \frac{1}{2} n y^{n-1} + \lambda = 0, \\ L_\lambda = x + y - c = 0, \end{cases} \text{ 解得 } x = y = \frac{c}{2}.$$

由实际问题的意义知当 $x = y = \frac{c}{2}$ 时, $f(x, y)$ 取得最小值 $\frac{1}{2} \left[\left(\frac{c}{2} \right)^n + \left(\frac{c}{2} \right)^n \right] = \left(\frac{c}{2} \right)^n$.



绝密★启用前

天一新奥

2022 年成人高等学校招生全国统一考试专升本



扫描二维码
获取视频和试题

高等数学(二)

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,满分 150 分,考试时间 150 分钟。

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第 I 卷(选择题,共 40 分)

得分	评卷人

一、选择题(1~10 小题,每小题 4 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 设函数 $f(x) = \sin x, g(x) = x^2$, 则 $f(g(x))$ 【 】
 A. 是奇函数但不是周期函数
 B. 是偶函数但不是周期函数
 C. 既是奇函数又是周期函数
 D. 既是偶函数又是周期函数
2. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+ax)^2 - 1}{x} = 2$, 则 $a =$ 【 】
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
3. 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, $g(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续, 则在 $x = 0$ 处 【 】
 A. $f(x)g(x)$ 连续 B. $f(x)g(x)$ 不连续
 C. $f(x) + g(x)$ 连续 D. $f(x) + g(x)$ 不连续
4. 设 $y = \arccos x$, 则 $y' =$ 【 】
 A. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ B. $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ C. $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ D. $-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
5. 设 $y = \ln(x + e^{-x})$, 则 $y' =$ 【 】
 A. $\frac{1+e^{-x}}{x+e^{-x}}$ B. $\frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$ C. $\frac{1}{1-e^{-x}}$ D. $\frac{1}{x+e^{-x}}$
6. 设 $y^{(n-2)} = x^2 + \sin x$, 则 $y^{(n)} =$ 【 】
 A. $2 - \sin x$ B. $2 - \cos x$ C. $2 + \sin x$ D. $2 + \cos x$

7. 若函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x) = -x + 1$, 则 【 】

- A. $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递减
 B. $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递增
 C. $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 单调递增
 D. $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增

8. 曲线 $y = \frac{2x}{x-1}$ 的水平渐近线方程为 【 】

- A. $y = 0$ B. $y = 1$ C. $y = 2$ D. $y = 3$

9. 设函数 $f(x) = \arctan x$, 则 $\int f'(x) dx =$ 【 】

- A. $\arctan x + C$ B. $-\arctan x + C$ C. $\frac{1}{1+x^2} + C$ D. $-\frac{1}{1+x^2} + C$

10. 设 $z = e^{x+y}$, 则 $dz \Big|_{(1,1)} =$ 【 】

- A. $dx + dy$ B. $dx + edy$ C. $edx + dy$ D. $e^2 dx + e^2 dy$

第 II 卷(非选择题,共 110 分)

得分	评卷人

二、填空题(11~20 小题,每小题 4 分,共 40 分)

11. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + x}{2e^x - x} =$ _____.
12. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(x)$ 是 x 的高阶无穷小量, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} =$ _____.
13. 设 $y = 3x^2 + \ln 3$, 则 $y' =$ _____.
14. 曲线 $y = x + \sqrt{x}$ 在点 $(1, 2)$ 处的法线方程为 _____.
15. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \cos x}{1+x^2} dx =$ _____.
16. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx =$ _____.
17. 设函数 $f(x) = \int_0^x u \tan u du$, 则 $f'(\frac{\pi}{4}) =$ _____.
18. 设 $z = x^3 y + xy^3$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ _____.
19. 设函数 $z = f(u, v)$ 具有连续偏导数, $u = x + y, v = xy$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ _____.
20. 设 A, B 为两个随机事件, 且 $P(A) = 0.5, P(AB) = 0.4$, 则 $P(B|A) =$ _____.

得 分	评卷人

三、解答题(21~28题,共70分.解答应写出推理、演算步骤)

21.(本题满分8分)

设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{x}, & x < 0, \\ x+2, & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,求 a .

22.(本题满分8分)

设 $y = \frac{x}{1-x}$,求 y' .

23.(本题满分8分)

求 $\int \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx$.

24.(本题满分8分)

计算 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx$.

25.(本题满分8分)

设离散型随机变量 X 的概率分布为

X	0	1	2
P	0.3	0.5	0.2

(1) 求 X 的分布函数 $F(x)$;

(2) 求 $E(X)$.

26.(本题满分10分)

设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $2y^2 + 2xz + z^2 = 1$ 所确定的隐函数,求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

27. (本题满分 10 分)

设 D 为由曲线 $y = x^2, y = 0, x = 2$ 所围成的图形.

(1) 求 D 的面积;

(2) 求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

28. (本题满分 10 分)

证明: 当 $x > 1$ 时, $\ln x < x - 1$.

参考答案及解析

一、选择题

1. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了复合函数的性质的知识点.

【应试指导】 $f(g(x)) = f(x^2) = \sin x^2$, 而 $f(g(-x)) = \sin(-x)^2 = \sin x^2 = f(g(x))$, 所以函数 $f(g(x))$ 是偶函数, 但不是周期函数.

2. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了洛必达法则的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+ax)^2 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2a(1+ax)}{1} = 2a(1+0) = 2a = 2$, 故 $a = 1$.

3. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了函数的连续性的知识点.

【应试指导】 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, $g(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续, 故 $f(x) + g(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续. 否则若 $f(x) + g(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $f(x) + g(x) - f(x) = g(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 与题意矛盾, 故选 D 选项.

4. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了函数导数的知识点.

【应试指导】 $y' = (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

5. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了复合函数的导数的知识点.

【应试指导】 $y' = [\ln(x + e^{-x})]' = \frac{1}{x + e^{-x}}(x + e^{-x})' = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$.

6. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了高阶导数的知识点.

【应试指导】 $y^{(n-1)} = [y^{(n-2)}]' = (x^2 + \sin x)' = 2x + \cos x$, 所以 $y^{(n)} = [y^{(n-1)}]' = (2x + \cos x)' = 2 - \sin x$.

7. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了函数的单调性的知识点.

【应试指导】 当 $x < 1$ 时, $f'(x) = -x + 1 > 0$, 故函数的单调递增区间为 $(-\infty, 1)$; 当 $x > 1$ 时, $f'(x) = -x + 1 < 0$, 故函数的单调递减区间为 $(1, +\infty)$. 因此选 C 选项.

8. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了函数的水平渐近线的知识点.

【应试指导】 由于 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{2}{1-0} = 2$, 故函数的水平渐近线为 $y = 2$.

9. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了不定积分的性质的知识点.

【应试指导】 $\int f'(x) dx = f(x) + C = \arctan x + C$.

10. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了二元函数的全微分的知识点.

【应试指导】 由题可得 $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x+y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x+y}$, 故 $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = e^{x+y} dx + e^{x+y} dy$, 因此 $dz \Big|_{(1,1)} = e^{1+1} \Big|_{(1,1)} dx + e^{1+1} \Big|_{(1,1)} dy = e^2 dx + e^2 dy$.

二、填空题

11.【答案】 -1

【考情点拨】 本题考查了洛必达法则的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + x}{2e^x - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 1}{2e^x - 1} = \frac{0+1}{0-1} = -1$.

12.【答案】 0

【考情点拨】 本题考查了高阶无穷小量的知识点.

【应试指导】 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是 x 的高阶无穷小量, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.

13.【答案】 $6x$

【考情点拨】 本题考查了导数的性质的知识点.

【应试指导】 $y' = (3x^2 + \ln 3)' = (3x^2)' + (\ln 3)' = 6x + 0 = 6x$.

14.【答案】 $2x + 3y - 8 = 0$

【考情点拨】 本题考查了导数的几何意义的知识点.

【应试指导】 由题可得 $y' = (x + \sqrt{x})' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$, 故 $y' \Big|_{x=1} = \frac{3}{2}$, 因此曲线在点 $(1, 2)$ 处法线的斜率是 $-\frac{2}{3}$,

故所求法线的方程为 $y - 2 = -\frac{2}{3}(x - 1)$, 即 $2x + 3y - 8 = 0$.

15.【答案】 0

【考情点拨】 本题考查了对称区间上奇偶函数的定积分的性质的知识点.

【应试指导】 令 $f(x) = \frac{x \cos x}{1 + x^2}$, $f(-x) = \frac{-x \cos(-x)}{1 + (-x)^2} = \frac{-x \cos x}{1 + x^2} = -f(x)$, 因此 $f(x)$ 为奇函数, 所以

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \cos x}{1 + x^2} dx = 0.$$

16.【答案】 $\sqrt{2} - 1$

【考情点拨】 本题考查了定积分的计算的知识点.

【应试指导】 $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} d(x^2 + 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{2} + 1} (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2} + 1} \Big|_0^1 = \sqrt{2} - 1$.

17.【答案】 $\frac{\pi}{4}$

【考情点拨】 本题考查了变上限定积分的知识点.

【应试指导】 由题意可得 $f'(x) = \left(\int_0^x u \tan u du \right)' = x \tan x$, 因此 $f' \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.

18.【答案】 $3x^2 + 3y^2$

【考情点拨】 本题考查了二阶偏导数的知识点.

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y + y^3$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3x^2 + 3y^2$.

19.【答案】 $\frac{\partial f}{\partial u} + y \frac{\partial f}{\partial v}$

【考情点拨】 本题考查了复合函数的偏导数的知识点.

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot y = \frac{\partial f}{\partial u} + y \frac{\partial f}{\partial v}$.

20.【答案】 0.8

【考情点拨】 本题考查了条件概率的知识点.

【应试指导】 $P(B | A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0.4}{0.5} = 0.8$.

三、解答题

21. 因为 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 2$.

由于 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin ax}{x} = a$, 所以 $a = 2$.

$$\begin{aligned} 22. y' &= \frac{1 - x - x \cdot (-1)}{(1 - x)^2} \\ &= \frac{1}{(1 - x)^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 23. \int \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx &= \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx \\ &= \ln |x+1| - \ln |x+2| + C \\ &= \ln \left| \frac{x+1}{x+2} \right| + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 24. \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b x^{-4} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left. \frac{-x^{-3}}{3} \right|_1^b \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3b^3} \right) \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$25. (1) F(x) = P\{X \leq x\} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0.3, & 0 \leq x < 1, \\ 0.8, & 1 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$(2) E(X) = 0 \times 0.3 + 1 \times 0.5 + 2 \times 0.2 = 0.9.$$

26. 方程两边分别对 x 和 y 求偏导数得

$$2z + 2x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + 2z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$4y + 2x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + 2z \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

$$\text{解得 } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{z}{x+z}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{x+z}.$$

27. (1) D 的面积

$$S = \int_0^2 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

(2) D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积

$$V = \int_0^2 \pi (x^2)^2 dx = \left. \frac{\pi x^5}{5} \right|_0^2 = \frac{32\pi}{5}.$$

28. 设 $f(x) = x - 1 - \ln x$, 则 $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$.

当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增.

又因为 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处连续, 且 $f(1) = 0$, 所以当 $x > 1$ 时, $f(x) > 0$.

因此当 $x > 1$ 时, $x - 1 - \ln x > 0$, 即 $\ln x < x - 1$.



绝密★启用前

2021 年成人高等学校招生全国统一考试专升本

高等数学(二)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,满分 150 分,考试时间 150 分钟。

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第Ⅰ卷(选择题,共 40 分)

得分	评卷人

一、选择题(1~10 小题,每小题 4 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan mx}{x} = 2$, 则 $m =$

A. 0

B. $\frac{1}{2}$

C. 1

D. 2

2. 设 $y = e^x + \cos x$, 则 $y' =$

A. $e^x + \cos x$

B. $e^x - \cos x$

C. $e^x - \sin x$

D. $e^x + \sin x$

3. 设 $y = x \tan x$, 则 $y' =$

A. $\tan x + \frac{x}{\cos^2 x}$

B. $\frac{x}{\cos^2 x}$

C. $\tan x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

D. $\tan x + \frac{x}{1+x^2}$

4. 设 $y = \frac{1}{1+x}$, 则 $y'' =$

A. $-\frac{2}{(1+x)^3}$

B. $-\frac{1}{(1+x)^3}$

C. $\frac{1}{(1+x)^3}$

D. $\frac{2}{(1+x)^3}$

5. 曲线 $y = x^3 + 1$ 的拐点为

A. (0, 0)

B. (0, 1)

C. (-1, 0)

D. (1, 1)

6. 设 $f(x)$ 的一个原函数为 $\cos 2x$, 则 $f(x) =$

A. $-\sin 2x$

B. $\sin 2x$

C. $-2\sin 2x$

D. $2\sin 2x$

7. 设 $\int_{-a}^a (x^2 + x^3) dx = \frac{2}{3}$, 则 $a =$

A. -2

B. -1

C. 1

D. 2

8. 设 $z = \sin(x - 3y^2)$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} =$

A. $-6y \cos(x - 3y^2)$

B. $-6y \sin(x - 3y^2)$

C. $6y \cos(x - 3y^2)$

D. $6y \sin(x - 3y^2)$

9. 设 $z = f(x^2 + y)$, 其中 f 具有二阶导数, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$

A. $xf''(x^2 + y)$

B. $2xf''(x^2 + y)$

C. $yf''(x^2 + y)$

D. $2xyf''(x^2 + y)$

10. 已知事件 A 与 B 互斥, 且 $P(A) = 0.5, P(B) = 0.4$, 则 $P(A+B) =$

A. 0.4

B. 0.5

C. 0.7

D. 0.9

第Ⅱ卷(非选择题,共 110 分)

得分	评卷人

二、填空题(11~20 小题,每小题 4 分,共 40 分)

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} =$

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $a =$

13. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 + x + 2} =$

14. 设 $y = \cos\left(x + \frac{1}{x}\right)$, 则 $y'(1) =$

15. 设 $f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x} + 1$, 则 $f'(x) =$

16. 曲线 $y = 2x^3 + x - 1$ 在点 $(0, -1)$ 处法线的斜率为

17. $\int \frac{1}{4+x^2} dx =$

18. $\int x(x^2 - 1) dx =$

19. $\int_0^1 (x + e^x) dx =$

20. 设函数 $f(x, y) = x + y$, 则 $f(x+y, x-y) =$

得 分	评卷人

三、解答题(21~28 题,共 70 分.解答应写出推理、演算步骤)

21.(本题满分 8 分)

计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$.

22.(本题满分 8 分)

求函数 $f(x) = e^{-x^2}$ 的单调区间和极值.

23.(本题满分 8 分)

求 $\int (2\arcsin x + 1)dx$.

24.(本题满分 8 分)

计算 $\int_1^4 \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx$.

25.(本题满分 8 分)

设离散型随机变量 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	a	$3a$	$4a$	$2a$

其中 a 为常数.

(1) 求 a ;

(2) 求 $E(X)$.

26.(本题满分 10 分)

设 $y = y(x)$ 是由方程 $e^y = x^2 + y$ 所确定的隐函数,求 $\frac{dy}{dx}$.

27. (本题满分 10 分)

设 D 为由直线 $x + y - 4 = 0$ 与曲线 $y = \frac{3}{x}$ 所围成的闭区域.

(1) 求 D 的面积;

(2) 求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

28. (本题满分 10 分)

求函数 $f(x, y) = x^2 + y^2$ 在条件 $x^2 + y^2 - xy - 1 = 0$ 下的最大值和最小值.

参考答案及解析

一、选择题

1. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了等价无穷小的代换的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan mx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{x} = m = 2.$

2. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了函数求导的知识点.

【应试指导】 $y' = (e^x + \cos x)' = (e^x)' + (\cos x)' = e^x - \sin x.$

3. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了函数求导的知识点.

【应试指导】 $y' = (x \tan x)' = \tan x + x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \tan x + \frac{x}{\cos^2 x}.$

4. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了函数的二阶导数的知识点.

【应试指导】 $y' = -\frac{1}{(1+x)^2}, y'' = -(-2) \frac{1}{(1+x)^3} = \frac{2}{(1+x)^3}.$

5. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了曲线拐点的知识点.

【应试指导】 $y' = 3x^2, y'' = 6x$, 令 $y'' = 0$, 得 $x = 0, y = 1$, 当 $x > 0$ 时, $y'' > 0$; 当 $x < 0$ 时, $y'' < 0$, 因此曲线的拐点为 $(0, 1)$.

6. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了原函数定义的知识点.

【应试指导】 由题可知 $f(x) = (\cos 2x)' = -2 \sin 2x.$

7. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了定积分的基本性质的知识点.

【应试指导】 $\int_{-a}^a (x^2 + x^3) dx = \int_{-a}^a x^2 dx + \int_{-a}^a x^3 dx = 2 \int_0^a x^2 dx = \frac{2}{3} x^3 \Big|_0^a = \frac{2}{3} a^3 = \frac{2}{3}$, 因此 $a = 1$.

8. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了二元函数的偏导数的知识点.

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial y} = \cos(x - 3y^2) \cdot (-6y) = -6y \cos(x - 3y^2).$

9. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了复合函数的二阶偏导数的知识点.

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial x} = f'(x^2 + y) \cdot 2x = 2xf'(x^2 + y), \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2xf''(x^2 + y).$

10. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了概率的性质的知识点.

【应试指导】 事件 A 与 B 互斥, 故 $P(AB) = 0$, 因此 $P(A + B) = P(A) + P(B) = 0.5 + 0.4 = 0.9$.

二、填空题

11. 【答案】 $\frac{3}{2}$

【考情点拨】 本题考查了两个重要极限的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = \frac{3}{2}.$

12. 【答案】 e

【考情点拨】 本题考查了分段函数的连续性的知识点.

【应试指导】 由于函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 故有 $f(0) = a = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$

13. 【答案】 2

【考情点拨】 本题考查了函数极限的四则运算的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 + x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = 2.$

14.【答案】0

【考情点拨】 本题考查了复合函数的导数的知识.

【应试指导】 $y' = -\sin\left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = -\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)$, 故 $y'(1) = 0$.

15.【答案】 $-\frac{2}{x^3} + 1$

【考情点拨】 本题考查了函数的导数的知识.

【应试指导】 令 $t = \frac{1}{x}$, 则有 $f(t) = \frac{1}{t^2} + t + 1$, 即 $f(x) = \frac{1}{x^2} + x + 1$, 因此 $f'(x) = -\frac{2}{x^3} + 1$.

16.【答案】 -1

【考情点拨】 本题考查了曲线法线的知识.

【应试指导】 $y' = 6x^2 + 1$, 故 $y'(0) = 1$, 因此曲线在点 $(0, -1)$ 处的法线的斜率为 -1 .

17.【答案】 $\frac{1}{2}\arctan \frac{x}{2} + C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识.

【应试指导】 $\int \frac{1}{4+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} d\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\arctan \frac{x}{2} + C$.

18.【答案】 $\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的性质的知识.

【应试指导】 $\int x(x^2-1) dx = \int (x^3-x) dx = \int x^3 dx - \int x dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + C$.

19.【答案】 $e - \frac{1}{2}$

【考情点拨】 本题考查了定积分的知识.

【应试指导】 $\int_0^1 (x+e^x) dx = \left(\frac{1}{2}x^2 + e^x\right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + e - 1 = e - \frac{1}{2}$.

20.【答案】 $2x$

【考情点拨】 本题考查了复合函数的知识.

【应试指导】 $f(x+y, x-y) = x+y+x-y = 2x$.

三、解答题

21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x} = -\frac{1}{2}$.

22. 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, $f'(x) = -2xe^{-x^2}$.

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 0$,

当 $x < 0$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x > 0$ 时, $f'(x) < 0$.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, 0)$, 单调递减区间为 $(0, +\infty)$,

$f(x)$ 的极大值为 $f(0) = 1$.

23. $\int (2\arcsin x + 1) dx = 2x\arcsin x - 2 \int x d(\arcsin x) + x$
 $= 2x\arcsin x - \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} dx + x$
 $= 2x\arcsin x + 2\sqrt{1-x^2} + x + C$.

24. 令 $t = \sqrt{x}$, 则 $x = t^2$, $dx = 2tdt$.

当 $x = 1$ 时, $t = 1$; 当 $x = 4$ 时, $t = 2$. 因此

$\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx = \int_1^2 \frac{2t}{t^2+t} dt$
 $= 2 \int_1^2 \frac{1}{t+1} dt$
 $= 2\ln(t+1) \Big|_1^2$
 $= 2\ln \frac{3}{2}$.

25. (1) 由概率分布的性质知

$$a + 3a + 4a + 2a = 1,$$

所以 $a = 0.1$.

$$(2) E(X) = 0 \times 0.1 + 1 \times 0.3 + 2 \times 0.4 + 3 \times 0.2 = 1.7.$$

26. 方程两边对 x 求导, 得 $e^y \frac{dy}{dx} = 2x + \frac{dy}{dx}$,

$$\text{所以 } \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{e^y - 1}.$$

27. 由 $\begin{cases} x+y-4=0, \\ y=\frac{3}{x} \end{cases}$ 解得交点坐标为 $(1, 3), (3, 1)$.

$$(1) D \text{ 的面积 } S = \int_1^3 \left(4-x-\frac{3}{x}\right) dx$$

$$= \left(4x - \frac{x^2}{2} - 3\ln x\right) \Big|_1^3$$

$$= 4 - 3\ln 3.$$

(2) D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积

$$V_x = \pi \int_1^3 \left[(4-x)^2 - \left(\frac{3}{x}\right)^2\right] dx$$

$$= \pi \left[-\frac{1}{3}(4-x)^3 + \frac{9}{x}\right] \Big|_1^3$$

$$= \frac{8\pi}{3}.$$

28. 设 $F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - xy - 1)$, 则

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + \lambda(2x - y),$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + \lambda(2y - x),$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - xy - 1.$$

由 $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ 与 $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ 解得 $x = y$ 或 $x = -y$,

代入 $\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$ 得 $f(x, y)$ 在条件 $x^2 + y^2 - xy - 1 = 0$ 下可能的极值点为

$$(1, 1), (-1, -1), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

因为由题设可知最大值和最小值一定存在, 所以最大值和最小值就在这些可能的极值点处取得.

又 $f(1, 1) = f(-1, -1) = 2$,

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2}{3},$$

所以所求的最大值为 2, 最小值为 $\frac{2}{3}$.



绝密★启用前

2020 年成人高等学校招生全国统一考试专升本

高等数学(二)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,满分 150 分,考试时间 150 分钟。

题 号	一	二	三	总 分	统分人签字
分 数					

第Ⅰ卷(选择题,共 40 分)

得 分	评卷人

一、选择题(1~10 小题,每小题 4 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{3x}} =$ 【 】

- A. $e^{\frac{2}{3}}$ B. $e^{\frac{2}{3}}$ C. $e^{\frac{1}{3}}$ D. e^6

2. 设函数 $y = x + 2\sin x$, 则 $dy =$ 【 】

- A. $(1-2\cos x)dx$ B. $(1+2\cos x)dx$ C. $(1-\cos x)dx$ D. $(1+\cos x)dx$

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 2} =$ 【 】

- A. $\frac{3}{2}$ B. 1 C. 2 D. $\frac{1}{2}$

4. 设函数 $f(x) = 3 + x^5$, 则 $f'(x) =$ 【 】

- A. x^4 B. $1 + x^4$ C. $\frac{1}{5}x^4$ D. $5x^4$

5. 设函数 $f(x) = 2\ln x$, 则 $f''(x) =$ 【 】

- A. $\frac{2}{x^2}$ B. $-\frac{2}{x^2}$ C. $\frac{1}{x^2}$ D. $-\frac{1}{x^2}$

6. $\int_{-2}^2 (1+x)dx =$ 【 】

- A. 4 B. 0 C. 2 D. -4

7. $\int \frac{3}{x^5} dx =$ 【 】

- A. $\frac{3}{4x^4} + C$ B. $\frac{3}{5x^4} + C$ C. $-\frac{3}{4x^4} + C$ D. $-\frac{3}{5x^4} + C$

8. 把 3 本不同的语文书和 2 本不同的英语书排成一排,则 2 本英语书恰好相邻的概率为 【 】

- A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{1}{2}$

9. 设函数 $z = x^2 - 4y^2$, 则 $dz =$ 【 】

- A. $x dx - 4y dy$ B. $x dx - y dy$ C. $2x dx - 4y dy$ D. $2x dx - 8y dy$

10. 设函数 $z = x^3 + xy^2 + 3$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} =$ 【 】

- A. $3x^2 + 2xy$ B. $3x^2 + y^2$ C. $2xy$ D. $2y$

第Ⅱ卷(非选择题,共 110 分)

得 分	评卷人

二、填空题(11~20 小题,每小题 4 分,共 40 分)

11. 设函数 $y = e^{2x}$, 则 $dy =$ _____.

12. 函数 $f(x) = x^3 - 6x$ 的单调递减区间为 _____.

13. 若函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x \leq 0, \\ a + \sin x, & x > 0, \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $a =$ _____.

14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} =$ _____.

15. $\int (3x + 2\sin x) dx =$ _____.

16. 曲线 $y = \arctan(3x + 1)$ 在点 $(0, \frac{\pi}{4})$ 处切线的斜率为 _____.

17. $(\int_0^{2x} \sin t^2 dt)' =$ _____.

18. $\int_{-\infty}^1 e^x dx =$ _____.

19. 区域 $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq x^2\}$ 的面积为 _____.

20. 方程 $y^3 + \ln y - x^2 = 0$ 在点 $(1, 1)$ 的某邻域确定隐函数 $y = y(x)$, 则 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=1} =$ _____.

得 分	评卷人

三、解答题(21~28题,共70分.解答应写出推理、演算步骤)

21.(本题满分8分)

计算 $\int x \sin x dx$.

22.(本题满分8分)

计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x - x^2}{2 \sin^2 x}$.

23.(本题满分8分)

已知函数 $f(x) = e^x \cos x$, 求 $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

24.(本题满分8分)

计算 $\int_0^1 \sqrt[3]{1+x} dx$.

25.(本题满分8分)

设 D 为曲线 $y = \sqrt{x}$, 直线 $x = 4$, x 轴围成的有界区域, 求 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

26.(本题满分10分)

求函数 $z = x^2 + 2y^4 + 4xy^2 - 2x$ 的极值.

27. (本题满分 10 分)

求曲线 $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ 的凹凸区间与拐点.

28. (本题满分 10 分)

已知离散型随机变量 X 的概率分布为

X	-1	0	2
P	a	0.5	b

且 $E(X) = 0$.

(1) 求 a, b ;

(2) 求 $E[X(X+1)]$.

参考答案及解析

一、选择题

1. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了函数极限的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{2x} \cdot \frac{2}{2}} = [\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{2x}}]^{\frac{2}{2}} = e^{\frac{2}{2}}.$

2. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了函数微分的知识点.

【应试指导】 $y' = (x+2\sin x)' = 1+2\cos x$, 故 $dy = y'dx = (1+2\cos x)dx$.

3. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了分式函数的极限的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x+1}{x^2-x+2} = \frac{1^2+1+1}{1^2-1+2} = \frac{3}{2}.$

4. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了一阶导数的知识点.

【应试指导】 $f'(x) = (3+x^5)' = 5x^4.$

5. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了二阶导函数的知识点.

【应试指导】 $f'(x) = (2\ln x)' = \frac{2}{x}, f''(x) = \left(\frac{2}{x}\right)' = -\frac{2}{x^2}.$

6. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了牛顿—莱布尼茨公式的知识点.

【应试指导】 $\int_{-2}^2 (1+x)dx = \left(x + \frac{1}{2}x^2\right) \Big|_{-2}^2 = 4.$

7. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int \frac{3}{x^5} dx = 3 \times \frac{1}{-5+1} x^{-5+1} + C = -\frac{3}{4x^4} + C.$

8. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了随机事件的概率的知识点.

【应试指导】 2 本英语书恰好相邻的概率为 $\frac{A_1^1 \cdot A_2^2}{A_5^5} = \frac{2}{5}.$

9. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了全微分的知识点.

【应试指导】 易知 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \frac{\partial z}{\partial y} = -8y$, 故 $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 2xdx - 8ydy$.

10. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了函数的偏导数的知识点.

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot (y^2)' = 2xy.$

二、填空题

11. 【答案】 $2e^{2x} dx$

【考情点拨】 本题考查了函数微分的知识点.

【应试指导】 $y' = (e^{2x})' = 2e^{2x}$, 故 $dy = y'dx = 2e^{2x} dx$.

12. 【答案】 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

【考情点拨】 本题考查了函数的单调性的知识点.

【应试指导】 易知 $f'(x) = 3x^2 - 6$, 令 $f'(x) < 0$, 则有 $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$, 故 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

13. 【答案】 -2

【考情点拨】 本题考查了分段函数连续性的知识点.

【应试指导】 由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 故有 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, 而 $f(0) = -2$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - 2) = -2$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (a + \sin x) = a$, 因此 $a = -2$.

14.【答案】 1

【考情点拨】 本题考查了函数极限的知识点.

【应试指导】 $x \rightarrow 0$ 时, $x^2 \rightarrow 0$, 故有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = 1$.

15.【答案】 $\frac{3}{2}x^2 - 2\cos x + C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int (3x + 2\sin x) dx = \frac{3}{2}x^2 - 2\cos x + C$.

16.【答案】 $\frac{3}{2}$

【考情点拨】 本题考查了函数切线的知识点.

【应试指导】 $y' = [\arctan(3x+1)]' = \frac{3}{1+(3x+1)^2}$, 故曲线在点 $(0, \frac{\pi}{4})$ 处的切线斜率为 $y'|_{x=0} =$

$$\frac{3}{1+(3 \times 0 + 1)^2} \Big|_{x=0} = \frac{3}{2}.$$

17.【答案】 $2\sin(4x^2)$

【考情点拨】 本题考查了定积分的性质的知识点.

【应试指导】 $\left(\int_0^{2x} \sin t^2 dt\right)' = \sin(2x)^2 \cdot (2x)' = 2\sin(4x^2)$.

18.【答案】 e

【考情点拨】 本题考查了反常积分的知识点.

【应试指导】 $\int_{-\infty}^1 e^x dx = e^x \Big|_{-\infty}^1 = e - 0 = e$.

19.【答案】 $\frac{4}{3}$

【考情点拨】 本题考查了定积分的应用的知识点.

【应试指导】 区域 D 的面积为 $\int_1^2 (x^2 - 1) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - x\right) \Big|_1^2 = \frac{4}{3}$.

20.【答案】 $\frac{1}{2}$

【考情点拨】 本题考查了隐函数求导的知识点.

【应试指导】 方程两边对 x 求导, 得 $3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} - 2x = 0$, 即 $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{3y^3 + 1}$, 故有 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=1} = \frac{2xy}{3y^3 + 1} \Big|_{x=1} =$

$$\frac{2 \times 1 \times 1}{3 \times 1^3 + 1} = \frac{1}{2}.$$

三、解答题

21. $\int x \sin x dx = -\int x d(\cos x)$

$$= -(x \cos x - \int \cos x dx)$$

$$= -x \cos x + \int \cos x dx$$

$$= -x \cos x + \sin x + C.$$

22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x - x^2}{2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2 \sin^2 x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2 \sin^2 x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{2x^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{4}.$$

23. $f'(x) = e^x \cos x + e^x \cdot (\cos x)'$

$$= e^x \cos x - e^x \sin x$$

$$= e^x (\cos x - \sin x),$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^x (\cos x - \sin x) + e^x (\cos x - \sin x)' \\ &= e^x (\cos x - \sin x) + e^x (-\sin x - \cos x) \\ &= -2e^x \sin x, \end{aligned}$$

$$\text{故有 } f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2e^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{\pi}{2} = -2e^{\frac{\pi}{2}}.$$

24. $\int_0^1 \sqrt[3]{1+x} dx = \int_0^1 (1+x)^{\frac{1}{3}} d(x+1)$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{3}} (1+x)^{\frac{1}{3}+1} \Big|_0^1$$

$$= \frac{3}{4} (1+x)^{\frac{4}{3}} \Big|_0^1$$

$$= \frac{3}{4} (2^{\frac{4}{3}} - 1).$$

25. 区域 $D: 0 \leq y \leq 2, y^2 \leq x \leq 4$,

$$\text{故所求旋转体的体积} = \pi \cdot 4^2 \cdot 2 - \int_0^2 \pi x^2 dy$$

$$= 32\pi - \int_0^2 \pi y^4 dy$$

$$= 32\pi - \frac{\pi}{5} y^5 \Big|_0^2$$

$$= \frac{128}{5}\pi.$$

26. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 4y^2 - 2, \frac{\partial z}{\partial y} = 8y^3 + 8xy,$

$$\text{令 } \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

得驻点为 $(1, 0), (-1, 1), (-1, -1)$.

$$\text{而 } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 8y, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 24y^2 + 8x,$$

$$\text{在 } (1, 0) \text{ 点, } A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(1,0)} = 2, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,0)} = 0, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{(1,0)} = 8,$$

$$B^2 - AC = -16 < 0, \text{ 且 } A > 0,$$

故函数在 $(1, 0)$ 点有极小值, $z_{\text{极小值}} = -1$;

$$\text{在 } (-1, 1) \text{ 点, } A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(-1,1)} = 2, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(-1,1)} = 8, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{(-1,1)} = 16,$$

$$B^2 - AC = 32 > 0, \text{ 故点 } (-1, 1) \text{ 不是极值点};$$

$$\text{在 } (-1, -1) \text{ 点, } A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(-1,-1)} = 2, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(-1,-1)} = -8, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{(-1,-1)} = 16,$$

$$B^2 - AC = 32 > 0, \text{ 故点 } (-1, -1) \text{ 不是极值点}.$$

因此函数在 $(1, 0)$ 点有极小值, $z_{\text{极小值}} = -1$.

27. $y' = 3x^2 - 6x + 2, y'' = 6x - 6,$

$$\text{令 } y'' = 0, \text{ 得 } x = 1.$$

当 $x > 1$ 时, $y'' > 0$, 故 $(1, +\infty)$ 为曲线的凹区间;

当 $x < 1$ 时, $y'' < 0$, 故 $(-\infty, 1)$ 为曲线的凸区间;

函数的拐点为 $(1, 1)$.

28. (1) 由概率的性质可知 $a + 0.5 + b = 1$,

$$\text{又 } E(X) = 0, \text{ 得 } -1 \times a + 0 \times 0.5 + 2 \times b = 0,$$

$$\text{故有 } a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{6}.$$

$$(2) E[X(X+1)] = E(X^2 + X) = E(X^2) + E(X),$$

$$\text{而 } E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (-1-0)^2 + \frac{1}{2} \cdot (0-0)^2 + \frac{1}{6} \cdot (2-0)^2$$

$$= 1,$$

$$\text{因此 } E[X(X+1)] = 1 + 0 = 1.$$



绝密★启用前

2019 年成人高等学校招生全国统一考试专升本

高等数学(二)

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,满分 150 分,考试时间 150 分钟。

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第 I 卷(选择题,共 40 分)

得分	评卷人

一、选择题(1~10 小题,每小题 4 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x =$ 【 】

- A.
- $-e^2$
- B.
- $-e$
- C.
- e
- D.
- e^2

2. 设函数 $y = \arcsin x$, 则 $y' =$ 【 】

- A.
- $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- B.
- $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- C.
- $-\frac{1}{1+x^2}$
- D.
- $\frac{1}{1+x^2}$

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 可导, $f'(x) > 0$, $f(a)f(b) < 0$, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 零点的个数为 【 】

- A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

4. 设函数 $y = x^3 + e^x$, 则 $y^{(4)} =$ 【 】

- A. 0 B.
- e^x
- C.
- $2 + e^x$
- D.
- $6 + e^x$

5. $\frac{d}{dx} \int \frac{1}{1+x^2} dx =$ 【 】

- A.
- $\arctan x$
- B.
- $\operatorname{arccot} x$
- C.
- $\frac{1}{1+x^2}$
- D. 0

6. $\int \cos 2x dx =$ 【 】

- A.
- $\frac{1}{2} \sin 2x + C$
- B.
- $-\frac{1}{2} \sin 2x + C$
- C.
- $\frac{1}{2} \cos 2x + C$
- D.
- $-\frac{1}{2} \cos 2x + C$

7. $\int_0^1 (2x+1)^3 dx =$ 【 】

- A. -10 B. -8 C. 8 D. 10

8. 设函数 $z = (x-y)^{10}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ 【 】

- A.
- $(x-y)^{10}$
- B.
- $-(x-y)^{10}$
- C.
- $10(x-y)^9$
- D.
- $-10(x-y)^9$

9. 设函数 $z = 2(x-y) - x^2 - y^2$, 则其极值点为 【 】

- A. (0,0) B. (-1,1) C. (1,1) D. (1,-1)

10. 设离散型随机变量 X 的概率分布为

X	-1	0	1	2
P	$2a$	a	$3a$	$4a$

则 $a =$ 【 】

- A. 0.1 B. 0.2 C. 0.3 D. 0.4

第 II 卷(非选择题,共 110 分)

得分	评卷人

二、填空题(11~20 小题,每小题 4 分,共 40 分)

11. 当 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x)$ 与 $3x$ 是等价无穷小, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} =$.

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} =$.

13. 设函数 $f(x) = \sqrt{x+x^2}$, 则 $f'(1) =$.

14. 设 x^2 为 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $f(x) =$.

15. 设函数 $y = \ln \sin x$, 则 $dy =$.

16. $\int \frac{1}{x^2} dx =$.

17. $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx =$.

18. $\int_{-1}^1 (x \cos^2 x + 2) dx =$.

19. 设函数 $z = \frac{e^y}{x}$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$.

20. 设函数 $z = \sin x \cdot \ln y$, 则 $dz =$.

得 分	评卷人

三、解答题(21~28 题,共 70 分.解答应写出推理、演算步骤)

21.(本题满分 8 分)

计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x}{2x^2 + 1}$.

22.(本题满分 8 分)

设函数 $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, 求 $f'(x)$.

23.(本题满分 8 分)

计算 $\int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$.

24.(本题满分 8 分)

计算 $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^3 x} dx$.

25.(本题满分 8 分)

一个袋中有 10 个乒乓球,其中 7 个橙色,3 个白色,从中任取 2 个,设事件 A 为“所取的 2 个乒乓球颜色不同”,求事件 A 发生的概率 $P(A)$.

26.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ 在 $x = 2$ 处取得极值,点 $(1, -1)$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点,求 a, b, c .

27. (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 的导函数连续, 且 $f(1) = 0, \int_0^1 xf(x)dx = 4$, 求 $\int_0^1 x^2 f'(x)dx$.

28. (本题满分 10 分)

设函数 $z = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$, 证明: $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

参考答案及解析

一、选择题

1. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了两个重要极限的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{x})^x = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{x})^{\frac{x}{2} \cdot 2} = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{x})^{\frac{x}{2}} \right]^2 = e^2$.

2. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了函数的导数公式的知识点.

【应试指导】 $y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了零点存在定理的知识点.

【应试指导】 由零点存在定理可知, $f(x)$ 在 (a, b) 上必有零点, 且函数是单调函数, 故其在 (a, b) 上只有一个零点.

4. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了高阶导数的知识点.

【应试指导】 $y' = 3x^2 + e^x, y'' = 6x + e^x, y''' = 6 + e^x, y^{(4)} = e^x$.

5. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了不定积分的性质的知识点.

【应试指导】 $\frac{d}{dx} \int \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{1+x^2}$.

6. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了不定积分公式的知识点.

【应试指导】 $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int \cos 2x d(2x) = \frac{1}{2} \sin 2x + C$.

7. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了定积分的计算的知识点.

【应试指导】 $\int_0^1 (2x+1)^3 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (2x+1)^3 d(2x+1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} (2x+1)^4 \Big|_0^1 = 10$.

8. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了偏导数的知识点.

【应试指导】 由偏导数公式可得 $\frac{\partial z}{\partial x} = 10(x-y)^9$.

9. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了二元函数极值的知识点.

【应试指导】 易知 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2-2x, \frac{\partial z}{\partial y} = -2-2y$, 令 $\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, 得驻点 $(1, -1)$, 而 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$, 故 $\Delta = 0 - (-2) \cdot (-2) = -4 < 0$, 因此 $(1, -1)$ 是函数的极值点.

10. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了概率的性质的知识点.

【应试指导】 由概率分布的性质可知 $2a + a + 3a + 4a = 10a = 1, a = 0.1$.

二、填空题

11. 【答案】 3

【考情点拨】 本题考查了等价无穷小的知识点.

【应试指导】 由题可知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{3x} = 1$, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{3x} = 3$.

12.【答案】 2

【考情点拨】 本题考查了极限的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x}}{1} = 2$.

13.【答案】 $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

【考情点拨】 本题考查了导函数的知识点.

【应试指导】 $f'(x) = \frac{1+2x}{2\sqrt{x+x^2}}$, 因此 $f'(1) = \frac{1+2 \times 1}{2\sqrt{1+1}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

14.【答案】 $2x$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的原函数的知识点.

【应试指导】 由题意可知 $\int f(x)dx = x^2 + C$, 故 $f(x) = (\int f(x)dx)' = (x^2 + C)' = 2x$.

15.【答案】 $\cot x dx$

【考情点拨】 本题考查了微分的知识点.

【应试指导】 $dy = d(\ln \sin x) = \frac{\cos x}{\sin x} dx = \cot x dx$.

16.【答案】 $-\frac{1}{x} + C$

【考情点拨】 本题考查了不定积的计算的知识点.

【应试指导】 $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{2+1} x^{-2+1} + C = -\frac{1}{x} + C$.

17.【答案】 $2\sin\sqrt{x} + C$

【考情点拨】 本题考查了复合函数的不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \cos\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2 \int \cos\sqrt{x} d\sqrt{x} = 2\sin\sqrt{x} + C$.

18.【答案】 4

【考情点拨】 本题考查了定积分的计算的知识点.

【应试指导】 $\int_{-1}^1 (x \cos^2 x + 2) dx = \int_{-1}^1 x \cos^2 x dx + 2x \Big|_{-1}^1 = 0 + 4 = 4$.

19.【答案】 $-\frac{e^x}{x^2}$

【考情点拨】 本题考查了二阶偏导数的知识点.

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{e^x}{x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{e^x}{x^2}$.

20.【答案】 $\cos x \ln y dx + \frac{\sin x}{y} dy$

【考情点拨】 本题考查了二元函数的全微分的知识点.

【应试指导】 $dz = d(\sin x \cdot \ln y) = \ln y d(\sin x) + \sin x d(\ln y) = \cos x \ln y dx + \frac{\sin x}{y} dy$.

三、解答题

21. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x}{2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{2 + \frac{1}{x^2}}$
 $= \frac{1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}}{2 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}}$
 $= \frac{1}{2}$.

22. $f'(x) = \frac{1+x^2-x \cdot 2x}{(1+x^2)^2}$
 $= \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$.

23. 令 $x = \sin t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, 则有 $dx = \cos t dt$,

$\int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{(1-\sin^2 t)^3}} \cdot \cos t dt$
 $= \int \frac{1}{\cos^2 t} dt$
 $= \tan t + C,$

而 $t = \arcsin x$, 故有

$\int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx = \tan t + C$
 $= \tan(\arcsin x) + C.$

24. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^3 x} dx = \int_e^{+\infty} \frac{1}{\ln^3 x} d(\ln x)$
 $= -\frac{1}{2(\ln x)^2} \Big|_e^{+\infty}$
 $= \frac{1}{2}.$

25. A 为所取的 2 个乒乓球颜色不同, 即 A 表示所取的 2 个球中 1 个球是橙色, 一个球是白色,

故 $P(A) = \frac{C_1^1 \cdot C_4^1}{C_{10}^2} = \frac{7}{15}$.

26. 易知 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, f''(x) = 6ax + 2b$,

由于 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处取得极值, 则 $f'(2) = 12a + 4b + c = 0$,

点 $(1, -1)$ 是 $y = f(x)$ 的拐点, 故有 $f(1) = -1, f''(1) = 0$,

即 $\begin{cases} a+b+c=-1, \\ 6a+2b=0, \end{cases}$ 解得 $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}, c = 0$.

27. $\int_0^1 x^2 f'(x) dx = \int_0^1 x^2 df(x)$
 $= x^2 f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) \cdot 2x dx$
 $= f(1) - 2 \int_0^1 xf(x) dx$
 $= 0 - 2 \times 4 = -8.$

28. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y^2}$, 故
 $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{x^2} \cdot x^2 + y^2 \cdot \frac{1}{y^2}$
 $= -1 + 1 = 0.$



绝密★启用前

2018 年成人高等学校招生全国统一考试专升本

高等数学(二)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,满分 150 分,考试时间 150 分钟。

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第Ⅰ卷(选择题,共 40 分)

得分	评卷人

一、选择题(1~10 小题,每小题 4 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\cos x} =$ 【 】

- A. e B. 2 C. 1 D. 0

2. 若 $y = 1 + \cos x$, 则 $dy =$ 【 】

- A.
- $(1 + \sin x)dx$
- B.
- $(1 - \sin x)dx$
- C.
- $\sin x dx$
- D.
- $-\sin x dx$

3. 若函数 $f(x) = 5^x$, 则 $f'(x) =$ 【 】

- A.
- 5^{x-1}
- B.
- $x5^{x-1}$
- C.
- $5^x \ln 5$
- D.
- 5^x

4. 曲线 $y = x^3 + 2x$ 在点(1,3)处的法线方程是 【 】

- A.
- $5x + y - 8 = 0$
- B.
- $5x - y - 2 = 0$
-
- C.
- $x + 5y - 16 = 0$
- D.
- $x - 5y + 14 = 0$

5. $\int \frac{1}{2-x} dx =$ 【 】

- A.
- $\ln |2-x| + C$
- B.
- $-\ln |2-x| + C$
-
- C.
- $-\frac{1}{(2-x)^2} + C$
- D.
- $\frac{1}{(2-x)^2} + C$

6. $\int f'(2x) dx =$ 【 】

- A.
- $\frac{1}{2}f(2x) + C$
- B.
- $f(2x) + C$
- C.
- $2f(2x) + C$
- D.
- $\frac{1}{2}f(x) + C$

7. 若 $f(x)$ 为连续的奇函数, 则 $\int_{-1}^1 f(x) dx =$ 【 】

- A. 0 B. 2 C.
- $2f(-1)$
- D.
- $2f(1)$

8. 若二元函数 $z = x^2 y + 3x + 2y$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ 【 】

- A.
- $2xy + 3 + 2y$
- B.
- $xy + 3 + 2y$
- C.
- $2xy + 3$
- D.
- $xy + 3$

9. 设区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq x^2, 0 \leq x \leq 1\}$, 则 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为 【 】

- A.
- $\frac{\pi}{5}$
- B.
- $\frac{\pi}{3}$
- C.
- $\frac{\pi}{2}$
- D.
- π

10. 设 A, B 为两个随机事件, 且相互独立, $P(A) = 0.6, P(B) = 0.4$, 则 $P(A - B) =$ 【 】

- A. 0.24 B. 0.36 C. 0.4 D. 0.6

第Ⅱ卷(非选择题,共 110 分)

得分	评卷人

二、填空题(11~20 小题,每小题 4 分,共 40 分)

11. 曲线 $y = x^3 - 6x^2 + 3x + 4$ 的拐点为_____.

12. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x)^{\frac{1}{x}} =$ _____.

13. 若函数 $f(x) = x - \arctan x$, 则 $f'(x) =$ _____.

14. 若 $y = e^{2x}$, 则 $dy =$ _____.

15. 设 $f(x) = x^{2x}$, 则 $f'(x) =$ _____.

16. $\int (2x + 3) dx =$ _____.

17. $\int_{-1}^1 (x^5 + x^2) dx =$ _____.

18. $\int_0^{\pi} \sin \frac{x}{2} dx =$ _____.

19. $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx =$ _____.

20. 若二元函数 $z = x^2 y^2$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ _____.

得 分	评卷人

三、解答题(21~28题,共70分.解答应写出推理、演算步骤)

21.(本题满分8分)

设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{3\sin x}{x}, & x < 0, \\ 3x + a & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续,求 a .

22.(本题满分8分)

求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 2x^2 - 1}{\sin(x^2 - 1)}$.

23.(本题满分8分)

设函数 $f(x) = 2x + \ln(3x + 2)$,求 $f''(0)$.

24.(本题满分8分)

求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin 3t dt}{x^2}$.

25.(本题满分8分)

求 $\int x \cos x dx$.

26.(本题满分10分)

求函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5$ 的极值.

27. (本题满分 10 分)

盒子中有 5 个产品, 其中恰有 3 个合格品. 从盒子中任取 2 个, 记 X 为取出的合格品个数. 求

(1) X 的概率分布;

(2) EX .

28. (本题满分 10 分)

求函数 $f(x, y) = x^3 + y^3$ 在条件 $x^2 + 2y^2 = 1$ 下的最值.

参考答案及解析

一、选择题

1. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了极限的运算的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\cos x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} x}{\lim_{x \rightarrow 0} \cos x} = \frac{0}{1} = 0$.

2. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了一元函数微分的知识点.

【应试指导】 $y' = -\sin x$, $dy = -\sin x dx$.

3. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了函数的求导公式的知识点.

【应试指导】 $f(x) = 5^x$, 则 $f'(x) = 5^x \ln 5$.

4. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了法线方程的知识点.

【应试指导】 $y' = 3x^2 + 2$, $y' \Big|_{x=1} = 5$, 则法线斜率 $k = -\frac{1}{5}$, 则法线方程为 $y - 3 = -\frac{1}{5}(x - 1)$, 即 $x + 5y - 16 = 0$.

5. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int \frac{1}{2-x} dx = -\int \frac{1}{2-x} d(2-x) = -\ln |2-x| + C$.

6. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了导数的原函数的知识点.

【应试指导】 $\int f'(2x) dx = \frac{1}{2} \int f'(2x) d(2x) = \frac{1}{2} f(2x) + C$.

7. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了定积分的性质的知识点.

【应试指导】 因为 $f(x)$ 是连续的奇函数, 故 $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$.

8. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了一阶偏导数的知识点.

【应试指导】 $z = x^2 y + 3x + 2y$, 故 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + 3$.

9. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了旋转体的体积的知识点.

【应试指导】 $V = \pi \int_0^1 f^2(x) dx = \pi \int_0^1 x^4 dx = \frac{\pi}{5} x^5 \Big|_0^1 = \frac{\pi}{5}$.

10. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了独立事件的知识点.

【应试指导】 因 A, B 相互独立, 故 $P(A - B) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) = 0.6 - 0.6 \times 0.4 = 0.36$.

二、填空题

11. 【答案】 $(2, -6)$

【考情点拨】 本题考查了拐点的知识点.

【应试指导】 $y' = 3x^2 - 12x + 3$, $y'' = 6x - 12$, 令 $y'' = 0$, 则 $x = 2$, 此时 $y = -6$, 故拐点为 $(2, -6)$.

12. 【答案】 e^{-3}

【考情点拨】 本题考查了 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ 的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} [1+(-3x)]^{\frac{1}{-3x} \cdot (-3)} = e^{-3}$.

13. 【答案】 $\frac{x^2}{1+x^2}$

【考情点拨】 本题考查了导数的求导公式的知识点.

【应试指导】 $f(x) = x - \arctan x$, 则 $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$.

14. 【答案】 $2e^{2x} dx$

【考情点拨】 本题考查了微分的知识点.

【应试指导】 $y = e^{2x}$, $y' = 2e^{2x}$, 则 $dy = 2e^{2x} dx$.

15. 【答案】 $2x^{2x}(\ln x + 1)$

【考情点拨】 本题考查了对数求导法的知识点.

【应试指导】 $y = x^{2x}$, 两边取对数得 $\ln y = 2x \ln x$, 两边同时对 x 求导得 $\frac{y'}{y} = 2 \ln x + 2$, 故 $y' = y(2 \ln x + 2) = 2x^{2x}(\ln x + 1)$.

16. 【答案】 $x^2 + 3x + C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int (2x + 3) dx = x^2 + 3x + C$.

17. 【答案】 $\frac{2}{3}$

【考情点拨】 本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】 $\int_{-1}^1 (x^5 + x^2) dx = \left(\frac{1}{6} x^6 + \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3}$.

18. 【答案】 2

【考情点拨】 本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】 $\int_0^\pi \sin \frac{x}{2} dx = 2 \int_0^\pi \sin \frac{x}{2} d\left(\frac{x}{2}\right) = -2 \cos \frac{x}{2} \Big|_0^\pi = 2$.

19. 【答案】 1

【考情点拨】 本题考查了无穷积分的知识点.

【应试指导】 $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 1$.

20. 【答案】 $4xy$

【考情点拨】 本题考查了二阶偏导数的知识点.

【应试指导】 $z = x^2 y^2$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xy$.

三、解答题

21. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3 \sin x}{x} = 3$,
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x + a) = a$,
 且 $f(0) = a$,
 $\because f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续,
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$,
 $\therefore a = 3$.

22. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 2x^2 - 1}{\sin(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 2x^2 - 1}{x^2 - 1}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x^2 + x + 1)(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + x + 1}{x + 1}$
 $= \frac{5}{2}$.

23. $f(x) = 2x + \ln(3x + 2)$,

$f'(x) = 2 + \frac{3}{3x + 2}$,

$f''(x) = -\frac{9}{(3x + 2)^2}$,

故 $f''(0) = -\frac{9}{4}$.

24. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin 3t dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}(1 - \cos 3x)}{x^2}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}(3x)^2}{x^2}$
 $= \frac{3}{2}$.

25. $\int x \cos x dx = \int x d \sin x$
 $= x \sin x - \int \sin x dx$
 $= x \sin x + \cos x + C$.

26. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5$,

则 $f'(x) = x^2 - x$, 令 $f'(x) = 0$, 则 $x_1 = 0, x_2 = 1$,

当 $x < 0$ 或 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, 此时 $f(x)$ 为单调增加函数;

当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, 此时 $f(x)$ 为单调减少函数.

故当 $x = 0$ 时, $f(x)$ 取极大值, 极大值 $f(0) = 5$;

当 $x = 1$ 时, $f(x)$ 取极小值, 极小值 $f(1) = \frac{29}{6}$.

27. (1) X 可能的取值为 $0, 1, 2$,

$P\{X = 0\} = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}$,

$P\{X = 1\} = \frac{C_3^1 C_2^1}{C_5^2} = \frac{3}{5}$,

$P\{X = 2\} = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$,

则 X 的分布律为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$

(2) $EX = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{3}{10} = \frac{6}{5}$.

28. 作拉格朗日函数 $L(x, y, \lambda) = x^3 + y^3 + \lambda(x^2 + 2y^2 - 1)$,

令 $\begin{cases} L'_x = 3x^2 + 2\lambda x = 0, \\ L'_y = 3y^2 + 4\lambda y = 0, \\ L'_\lambda = x^2 + 2y^2 - 1 = 0, \end{cases}$

解得驻点 $(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$ 和 $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$,

且 $f(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}) = -\frac{1}{3}$, $f(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = \frac{1}{3}$.

故函数 $f(x, y)$ 在条件 $x^2 + 2y^2 = 1$ 下的最小值为 $-\frac{1}{3}$, 最大值为 $\frac{1}{3}$.



绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试专升本高等数学(二)

全真模拟(一)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,满分150分,考试时间150分钟。

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第Ⅰ卷(选择题,共84分)

得分	评卷人

一、选择题(1~12小题,每小题7分,共84分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 设函数 $f(x) = \begin{cases} ke^{2x}, & x < 0, \\ 1 + \cos x, & x \geq 0, \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续,则常数 $k =$ 【 】

- A. 1
B. 2
C. 0
D. 3

2. 若 $f(x)$ 为偶函数,则 $\int_0^x f(t)dt$ 是 【 】

- A. 奇函数
B. 偶函数
C. 非奇非偶函数
D. 周期函数

3. 下列变量在给定的变化过程中是无穷小量的是 【 】

- A. $\frac{\sin x}{x} (x \rightarrow 0)$
B. $2^{-x} - 2 (x \rightarrow 0)$
C. $\frac{x^2}{\sqrt{x^4 + 1}} (x \rightarrow +\infty)$
D. $x \cdot \sin \frac{1}{x} (x \rightarrow 0)$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{3x-4} =$ 【 】

- A. $-\frac{1}{4}$
B. 0
C. $\frac{2}{3}$
D. 1

5. 设 $\int f(x)dx = x^2 + C$, 则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(-\sin x) \cos x dx =$ 【 】

- A. 1
B. -1
C. $\frac{\pi^2}{4}$
D. $-\frac{\pi^2}{4}$

6. 设函数 $y = e^{x-1} + 1$ 则 $dy =$ 【 】

- A. $e^x dx$
B. $e^{x-1} dx$
C. $(e^x + 1) dx$
D. $(e^{x-1} + 1) dx$

7. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $\int \cos x f(\sin x) dx =$ 【 】

- A. $F(\cos x) + C$
B. $F(\sin x) + C$
C. $-F(\cos x) + C$
D. $-F(\sin x) + C$

8. 曲线 $y = (x-1)^3 - 1$ 的拐点是 【 】

- A. (2, 0)
B. (1, -1)
C. (0, -2)
D. 不存在

9. 设函数 $y = x^4 + 2x^2 + 3$, 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} =$ 【 】

- A. $4x^3 + 4x$
B. $4x^3 + 4$
C. $12x^2 + 4x$
D. $12x^2 + 4$

10. 设 $z = xe^{xy}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 等于 【 】

- A. xye^{xy}
B. $x^2 e^{xy}$
C. e^{xy}
D. $(1 + xy)e^{xy}$

11. 有两箱同种零件, 第一箱内装50件, 其中一等品10件; 第二箱内装30件, 其中一等品18件; 现随机地从两箱中挑出一箱, 再从这箱中随机地取出一件零件, 则取出的零件是一等品的概率为 【 】

- A. $\frac{1}{5}$
B. $\frac{2}{5}$
C. $\frac{3}{5}$
D. $\frac{4}{5}$

12. $\int_1^e x \ln x dx =$ 【 】

- A. 0
B. $\frac{1}{4}(e^2 + 1)$
C. $\frac{1}{4}(e^2 - 1)$
D. $e^2 - 1$

第 II 卷 (非选择题, 共 66 分)

得 分	评卷人

二、填空题 (13~15 小题, 每小题 7 分, 共 21 分)

13. 曲线 $x^2 + y^2 = 2x$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程为_____.

14. 若 $f(x)$ 是奇函数, 且 $\int_0^1 f(x) dx = 1$, 则 $\int_{-1}^0 f(x) dx =$ _____.

15. 设 $z = \sqrt{x(x+y^2)}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.

得 分	评卷人

三、解答题 (16~18 题, 每小题 15 分, 共 45 分. 解答应写出推理、演算步骤)

16. (本题满分 15 分)

计算 $\int \frac{x + \arctan x}{1 + x^2} dx$.

17. (本题满分 15 分)

设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $f(x) = x + 2 \int_0^1 f(t) dt$, 求 $f(x)$.

18. (本题满分 15 分)

设连续函数 $f(x) = \ln x - \int_1^e f(x) dx$, 证明: $\int_1^e f(x) dx = \frac{1}{e}$.

参考答案及解析

一、选择题

1. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了连续函数的定义的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \cos x) = 1 + \cos 0 = 2$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} k e^{2x} = k$, 由于 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 故有 $2 = k$.

2. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了定积分的性质的知识点.

【应试指导】 记 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$,

则 $F(-x) = \int_0^{-x} f(t) dt \xrightarrow{t=-u} \int_0^x f(-u)(-du)$ (因 $f(x)$ 为偶函数, 故 $f(x) = f(-x)$) $= -\int_0^x f(u) du = -F(x)$,

所以 $F(x)$ 是奇函数.

3. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了无穷小量的知识点.

【应试指导】 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} (2^{-x} - 2) = -1$, 故由无穷小量知应选 D. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + 1}} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$.

4. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了洛必达法则的知识点.

【应试指导】 由洛必达法则可知, 原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{3x-4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+1)'}{(3x-4)'} = \frac{2}{3}$.

5. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了定积分的换元积分法的知识点.

【应试指导】 由 $\int f(x) dx = x^2 + C$, 知 $\int f(-\sin x) \cos x dx = \int f(-\sin x) d\sin x = -\int f(-\sin x) d(-\sin x) = -(-\sin x)^2 +$

$C = -\sin^2 x + C$, 所以 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(-\sin x) \cos x dx = -\sin^2 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -1$.

6. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了一元函数的微分的知识点.

【应试指导】 因为 $y = e^{-1} + 1$, $y' = e^{-1}$, 则 $dy = e^{-1} dx$.

7.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了不定积分的换元积分法的知识点.

【应试指导】 $\int \cos x f(\sin x) dx = \int f(\sin x) d\sin x \xrightarrow{u=\sin x} \int f(u) du = F(u) + C = F(\sin x) + C.$

8.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了曲线的拐点的知识点.

【应试指导】 因 $y = (x-1)^3 - 1, y' = 3(x-1)^2, y'' = 6(x-1).$ 令 $y'' = 0$ 得 $x = 1$, 当 $x < 1$ 时, $y'' < 0$; 当 $x >$

1 时, $y'' > 0$. 又因 $y \Big|_{x=1} = -1$, 于是曲线有拐点 $(1, -1)$.

9.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了一元函数的高阶导数的知识点.

【应试指导】 因为 $y = x^4 + 2x^2 + 3$, 故 $\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 4x, \frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 + 4.$

10.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了二元函数的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】 因 $z = xe^{xy}$, 所以 $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{xy} + x \cdot e^{xy} \cdot y = (1 + xy)e^{xy}.$

11.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了全概率的知识点.

【应试指导】 设 $A_i = \{\text{挑出的是第 } i \text{ 箱}\}, i = 1, 2; B = \{\text{取出的是等品}\}.$ 由题意知, $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2},$

$P(B | A_1) = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}, P(B | A_2) = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}.$ 由全概率公式知: $P(B) = P(A_1) \cdot P(B | A_1) +$

$P(A_2)P(B | A_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5}.$

12.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了分部积分法的知识点.

【应试指导】 $\int_1^e x \ln x dx = \frac{1}{2} \int_1^e \ln x dx^2 = \frac{1}{2} \left[x^2 \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x^2 \cdot \frac{1}{x} dx \right] = \frac{1}{2} \left(e^2 - \frac{1}{2} x^2 \Big|_1^e \right) = \frac{1}{4} (e^2 + 1).$

二、填空题

13.【答案】 $y = 1$

【考情点拨】 本题考查了曲线上一点处的切线方程的知识点.

【应试指导】 由 $x^2 + y^2 = 2x$, 两边对 x 求导得 $2x + 2yy' = 2$, 取 $x = 1, y = 1$, 则 $y' \Big|_{x=1} = 0$, 所以切线方程

为 $y = 1.$

14.【答案】 -1

【考情点拨】 本题考查了定积分的性质的知识点.

【应试指导】 若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$, 即 $\int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = 0$, 所以 $\int_{-1}^0 f(x) dx = -1.$

注: 若 $f(x)$ 是偶函数, 则 $\int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx.$

15.【答案】 $\frac{xy}{\sqrt{x(x+y^2)}}$

【考情点拨】 本题考查了二元函数的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x(x+y^2)}} \cdot x \cdot 2y = \frac{xy}{\sqrt{x(x+y^2)}}.$

三、解答题

16. 由 $\frac{\arctan x}{1+x^2} dx = \arctan x d\arctan x$, 则

$$\begin{aligned} \int \frac{x + \arctan x}{1+x^2} dx &= \int \frac{x}{1+x^2} dx + \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \int \arctan x d\arctan x \\ &= \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{1}{2} (\arctan x)^2 + C. \end{aligned}$$

17. 令 $\int_0^1 f(t) dt = c$, 则由题设知 $f(x) = x + 2c$,

所以 $c = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x + 2c) dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 + 2c = \frac{1}{2} + 2c,$

故 $c = -\frac{1}{2}$, 因此 $f(x) = x - 1.$

18. 设 $\int_1^e f(x) dx = c$, 则 $f(x) = \ln x - c$,

$$\begin{aligned} \text{故 } c &= \int_1^e (\ln x - c) dx = \int_1^e \ln x dx - c(e-1) \\ &= (x \cdot \ln x) \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx - c(e-1) \\ &= e - (e-1) - c(e-1) \\ &= 1 - c(e-1), \end{aligned}$$

所以 $c = \frac{1}{e}$, 故 $\int_1^e f(x) dx = \frac{1}{e}.$



绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试专升本高等数学(二)

全真模拟(二)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,满分150分,考试时间150分钟。

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第Ⅰ卷(选择题,共84分)

得分	评卷人

一、选择题(1~12小题,每小题7分,共84分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 函数 $f(x) = \begin{cases} x-1, & 0 \leq x < 1, \\ 2x, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$ 的连续区间是 【 】

- A. $[0,1) \cup (1,3]$ B. $[1,3]$
C. $[0,1)$ D. $[0,3]$

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a =$ 【 】

- A. -1 B. 1
C. 2 D. 3

3. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} = 3$, 则 a 的值是 【 】

- A. $\frac{1}{3}$ B. 1
C. 2 D. 3

4. 设 $f'(1) = 1$, 则 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1}$ 等于 【 】

- A. 0 B. 1
C. $\frac{1}{2}$ D. 2

5. 设函数 $f(x) = e^{1-2x}$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的导数 $f'(0) =$ 【 】

- A. 0 B. e
C. -e D. -2e

6. 已知函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导, 且 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{f(x_0 - 2h) - f(x_0)} = \frac{1}{4}$, 则 $f'(x_0)$ 等于 【 】

- A. -4 B. -2
C. 2 D. 4

7. 若 $\int_0^x f(t) dt = \frac{x^4}{2}$, 则 $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} f(\sqrt{x}) dx$ 等于 【 】

- A. 2 B. 4
C. 8 D. 16

8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos x) dx =$ 【 】

- A. $\frac{\pi}{2} + 1$ B. $\frac{\pi}{2}$
C. $\frac{\pi}{2} - 1$ D. 1

9. 若 $\int f(x) dx = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$, 则 $f(x)$ 等于 【 】

- A. $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ B. $\frac{1}{1+x^2}$
C. $-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ D. $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

10. 设 $z = \ln \frac{y}{x}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 等于 【 】

- A. $\frac{x}{y}$ B. $\frac{1}{x}$
C. $-\frac{1}{x}$ D. $-\frac{y}{x^2}$

11. 已知离散型随机变量 X 的概率分布为

X	0	1
P	0.5	0.5

则 $E(X) =$ 【 】

- A. 0 B. 1
C. 0.5 D. 1.5

12. 曲线 $y = 3x^2 - x^3$ 的凸区间为 【 】

- A. $(-\infty, 1)$ B. $(1, +\infty)$
C. $(-\infty, 0)$ D. $(0, +\infty)$

第 II 卷 (非选择题, 共 66 分)

得 分	评卷人

二、填空题 (13~15 小题, 每小题 7 分, 共 21 分)

13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

14. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

15. 设 $z = u^2 \ln v$, $u = \frac{y}{x}$, $v = e^{x^3 y}$, 则 $dz = \underline{\hspace{2cm}}.$

得 分	评卷人

三、解答题 (16~18 题, 每小题 15 分, 共 45 分. 解答应写出推理、演算步骤)

16. (本题满分 15 分)

从一批有 10 件正品及 2 件次品的产品中, 不放回地一件一件地抽取产品. 设每个产品被抽到的可能性相同. 求直到取出正品为止所需抽取的次数 X 的概率分布.

17. (本题满分 15 分)

求曲线 $y = \sqrt{x}$, 直线 $x = 1$ 和 x 轴所围成的有界平面图形的面积 S , 及该平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积 V .

密
封
线
内
不
要
答
题



绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试专升本高等数学(二)

全真模拟(三)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,满分150分,考试时间150分钟。

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第Ⅰ卷(选择题,共84分)

得分	评卷人

一、选择题(1~12小题,每小题7分,共84分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

- 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin 3x$ 是 $2x$ 的 【 】
 - 低阶无穷小量
 - 等价无穷小量
 - 同阶但不等价无穷小量
 - 高阶无穷小量
- 函数 $y = x + \cos x$ 在 $(0, 2\pi)$ 内 【 】
 - 单调增加
 - 单调减少
 - 不单调
 - 不连续
- $\int \sin 2x dx =$ 【 】
 - $\cos 2x + C$
 - $-\cos 2x + C$
 - $\frac{1}{2}\cos 2x + C$
 - $-\frac{1}{2}\cos 2x + C$
- 设函数 $y = 2 + \sin x$, 则 $y' =$ 【 】
 - $\cos x$
 - $-\cos x$
 - $2 + \cos x$
 - $2 - \cos x$
- 函数 $f(x) = x^4 - 24x^2 + 6x$ 在定义域内的凸区间是 【 】
 - $(-\infty, 0)$
 - $(-2, 2)$
 - $(0, +\infty)$
 - $(-\infty, +\infty)$
- 如果在区间 (a, b) 内, 函数 $f(x)$ 满足 $f'(x) > 0, f''(x) < 0$, 则函数在此区间是 【 】
 - 单调递增且曲线为凹的
 - 单调递减且曲线为凸的
 - 单调递增且曲线为凸的
 - 单调递减且曲线为凹的

- 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $a \neq -b$, 则下列各式不成立的是 【 】
 - $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$
 - $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$
 - $\int_a^b f(x) dx = 0$
 - 若 $\int_a^b f(x) dx = 0$, 必有 $f(x) = 0$
- 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ 等于 【 】
 - 0
 - 1
 - 2
 - 3
- $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx =$ 【 】
 - 不收敛
 - 1
 - 1
 - 0
- 曲线 $y = 2 + (x - 4)^{\frac{1}{3}}$ 的拐点为 【 】
 - $(4, 2)$
 - $x = 4$
 - $y = 2$
 - $(2, 4)$
- 事件 A, B 满足 $AB = A$, 则 A 与 B 的关系为 【 】
 - $A = B$
 - $A \subset B$
 - $A \supset B$
 - $A = \bar{B}$
- 设函数 $z = x^2 + y$, 则 $dz =$ 【 】
 - $2x dx + dy$
 - $x^2 dx + dy$
 - $x^2 dx + y dy$
 - $2x dx + y dy$

第Ⅱ卷(非选择题,共66分)

得分	评卷人

二、填空题(13~15小题,每小题7分,共21分)

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{2x^2+3} =$ _____.
- $\int \frac{1}{x^2+2x+5} dx =$ _____.
- 设 $z = e^{\sin x} \cos y$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} =$ _____.

得 分	评卷人

三、解答题(16 ~ 18 题,每小题 15 分,共 45 分. 解答应写出推理、演算步骤)

16.(本题满分 15 分)

某运动员投篮命中率为 0.3,求一次投篮时投中次数的概率分布及分布函数.

17.(本题满分 15 分)

求 $y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 14$ 的极值点和极值,以及函数曲线的凸凹性区间和拐点.

18. (本题满分 15 分)

试用夹逼定理证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n \sqrt{3+x} dx = 0$.

参考答案及解析

一、选择题

1. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了函数的连续性的知识点.

【应试指导】 因 $x=1$ 处 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x = 2$,

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续, 因此 $f(x)$ 的连续区间为 $[0, 1) \cup (1, 3]$.

2. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了函数在一点处连续的知识点.

【应试指导】 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处既左连续又右连续, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) =$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2 = f(0) = a$, 故 $a = 2$.

3. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了函数极限的知识点.

【应试指导】 由洛必达法则, 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} a \cos(ax) = a \cos 0 = 3$, 所以 $a = 3$.

4. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了利用导数定义求极限的知识点.

【应试指导】 因 $f'(1) = 1$, 于是 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \cdot \frac{1}{x + 1} = \frac{1}{2} f'(1) = \frac{1}{2}$.

5. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了导数的知识点.

【应试指导】 $f'(x) = -2e^{1-2x}$, 故 $f'(0) = -2e$.

6. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了利用定义求函数的一阶导数的知识点.

【应试指导】 因 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{f(x_0 - 2h) - f(x_0)} = \frac{1}{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2h) - f(x_0)}{h}} = \frac{1}{-2f'(x_0)} = \frac{1}{4}$, 于是 $f'(x_0) = -2$.

7. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了定积分的换元积分法的知识点.

【应试指导】 解法 1:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} f(\sqrt{x}) dx = \int_0^1 f(\sqrt{x}) \cdot 2d(\sqrt{x}) = 2 \times \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 = 16.$$

解法 2:

$$\text{因 } \int_0^x f(t) dt = \frac{x^4}{2}, \text{ 于是 } f(x) = 2x^3, \text{ 从而 } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} f(\sqrt{x}) dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot 2 \cdot x^{\frac{3}{2}} dx = 2 \int_0^1 x dx = x^2 \Big|_0^1 = 16.$$

8. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + 1$.

9.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 因 $\int f(x)dx = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$, 所以 $f(x) = [\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C]' = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}$.

$$\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

10.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了二元函数的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】 因 $z = \ln \frac{y}{x}$, 于是 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{y} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{1}{x}$.

11.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了数学期望的知识点.

【应试指导】 由题意知, $E(X) = 0 \times 0.5 + 1 \times 0.5 = 0.5$.

12.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了曲线的凸区间的知识点.

【应试指导】 $y = 3x^2 - x^3, y' = 6x - 3x^2, y'' = 6 - 6x = 6(1-x)$, 显然当 $x > 1$ 时, $y'' < 0$; 而当 $x < 1$ 时, $y'' > 0$.

故在 $(1, +\infty)$ 内曲线为凸弧.

二、填空题

13.【答案】 e^2

【考情点拨】 本题考查了 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 的应用的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^2}}{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{x^2}} = \frac{e}{e^{-1}} = e^2$.

本题还可如下解出:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x^2-1}\right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x^2-1}\right)^{x^2-1} \cdot \left(1 + \frac{2}{x^2-1}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x^2-1}{2}}\right)^{\frac{x^2-1}{2}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x^2-1}\right) = e^2.$$

14.【答案】 $\frac{1}{8}$

【考情点拨】 本题考查了无穷区间的反常积分的知识点.

【应试指导】 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_2^a \frac{1}{x^3} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[\left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{x^2} \right]_2^a = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a^2} \right) = \frac{1}{8}$.

15.【答案】 $y^3 dx + 3xy^2 dy$

【考情点拨】 本题考查了复合函数的全微分的知识点.

【应试指导】 因 $z = u^2 \ln v, u = \frac{y}{x}, v = e^{x^3 y}$, 所以 $z = \frac{y^2}{x^2} \cdot x^3 y = xy^3$, 于是 $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = y^3 dx + 3xy^2 dy$.

三、解答题

16. 由题意, X 的所有可能的取值为 1, 2, 3,

$X = 1$, 即第一次就取到正品, $P\{X = 1\} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$;

$X = 2$, 即第一次取到次品且第二次取到正品, $P\{X = 2\} = \frac{2}{12} \times \frac{10}{11} = \frac{5}{33}$;

同理, $P\{X = 3\} = \frac{2}{12} \times \frac{1}{11} \times \frac{10}{10} = \frac{1}{66}$,

故 X 的概率分布如下

X	1	2	3
P	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{33}$	$\frac{1}{66}$

17. 面积 $S = \int_0^1 \sqrt{x} dx$

$$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{3}.$$

旋转体的体积 $V = \int_0^1 \pi(\sqrt{x})^2 dx$

$$= \int_0^1 \pi x dx$$

$$= \frac{\pi}{2} x^2 \Big|_0^1$$

$$= \frac{\pi}{2}.$$

18. 由 $\sqrt{3} \leq \sqrt{3+x} \leq 2, x \in [0, 1]$,

则 $\sqrt{3} \cdot x^n \leq \sqrt{3+x} \cdot x^n \leq 2x^n$.

所以 $\sqrt{3} \int_0^1 x^n dx \leq \int_0^1 \sqrt{3+x} \cdot x^n dx \leq 2 \int_0^1 x^n dx$,

即 $\sqrt{3} \frac{1}{n+1} \leq \int_0^1 \sqrt{3+x} \cdot x^n dx \leq 2 \cdot \frac{1}{n+1}$.

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3}}{n+1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sqrt{3+x} \cdot x^n dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1}$,

即 $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sqrt{3+x} \cdot x^n dx \leq 0$.

故由夹逼定理得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n \sqrt{3+x} dx = 0$.

18. (本题满分 15 分)

求曲线 $y = x^2$ 与该曲线在 $x = a (a > 0)$ 处的切线与 x 轴所围的平面图形的面积.

参考答案及解析

一、选择题

1. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了无穷小量的比较的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = \frac{3}{2}$, 故 $\sin 3x$ 是 $2x$ 的同阶但不等价无穷小量.

2. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了函数的单调性的知识点.

【应试指导】 由 $y = x + \cos x$, 所以 $y' = 1 - \sin x \geq 0 (0 < x < 2\pi)$, 故 y 在 $(0, 2\pi)$ 内单调增加.

3. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int \sin 2x dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x d2x = \frac{1}{2} (-\cos 2x) + C$.

4. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了导数的知识点.

【应试指导】 因为 $y = 2 + \sin x$, 所以 $y' = \cos x$.

5. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了函数的凸区间的知识点.

【应试指导】 因为 $f(x) = x^4 - 24x^2 + 6x$, 则 $f'(x) = 4x^3 - 48x + 6$, $f''(x) = 12x^2 - 48 = 12(x^2 - 4)$, 令 $f''(x) < 0$, 有 $x^2 - 4 < 0$, 于是 $-2 < x < 2$, 即凸区间为 $(-2, 2)$.

6. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了函数的单调性和凹凸性的知识点.

【应试指导】 因 $f'(x) > 0$, 故函数单调递增, 又 $f''(x) < 0$, 所以函数曲线为凸的.

7. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了定积分的相关知识的知识点.

【应试指导】 由题意知, C 项不成立, 其余各项均成立.

8. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了极限的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2$.

9. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了反常积分的知识点.

【应试指导】 $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 0 + 1 = 1$.

10.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了曲线的拐点的知识点.

【应试指导】 $y = 2 + (x-4)^{\frac{1}{3}}, y' = \frac{1}{3}(x-4)^{-\frac{2}{3}}, y'' = -\frac{2}{9}(x-4)^{-\frac{5}{3}}$, 函数在 $x = 4$ 处连续, 当 $x < 4$ 时, $y'' > 0$; 当 $x > 4$ 时, $y'' < 0$, 所以点 $(4, 2)$ 为曲线的拐点.

11.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了事件的关系的知识点.

【应试指导】 $AB = A$, 则 $A \subset AB$ ($AB \subset A$, 按积的定义是当然的), 即当 $\omega \in A$ 时, 必有 $\omega \in AB$, 因而 $\omega \in B$, 故 $A \subset B$.

12.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了二元函数的全微分的知识点.

【应试指导】 因为 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \frac{\partial z}{\partial y} = 1$,

故 $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = 2xdx + dy$.

二、填空题

13.【答案】 $-\frac{1}{3}$

【考情点拨】 本题考查了极限的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{2x^2+3} = -\frac{1}{3}$.

14.【答案】 $\frac{1}{2} \arctan \frac{x+1}{2} + C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int \frac{1}{x^2+2x+5} dx = \int \frac{1}{x^2+2x+1+4} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+4} dx = \frac{1}{2} \arctan \frac{x+1}{2} + C$.

15.【答案】 $-e^{\sin x} \cos x \sin y$

【考情点拨】 本题考查了二元函数的混合偏导数的知识点.

【应试指导】 由 $z = e^{\sin x} \cos y$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} = -e^{\sin x} \sin y, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -e^{\sin x} \cos x \sin y$.

三、解答题

16. 这次投篮的投中次数是随机变量, 设其为 X , 它可能取的值为 $0, 1, X = 0$ 表示投中 0 次, 即投篮未中,

$P\{X = 0\} = 1 - 0.3 = 0.7; X = 1$ 表示投中一次, $P\{X = 1\} = 0.3$, 故概率分布为

X	0	1
P	0.7	0.3

分布函数 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0.7, & 0 \leq x < 1, \\ 0.7 + 0.3 = 1, & x \geq 1. \end{cases}$

17. $y' = 6x^2 - 6x - 12, y'' = 12x - 6$,

令 $y' = 0$ 得驻点 $x_1 = -1, x_2 = 2$,

当 $x_2 = 2$ 时, $y'' = 18 > 0$. 所以 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处取极小值 -6 .

当 $x_1 = -1$ 时, $y'' < 0$. 所以 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处取极大值 21 .

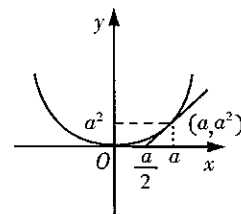
又令 $y'' = 0$, 得 $x = \frac{1}{2}$,

$x < \frac{1}{2}$ 时, $y'' < 0$, 从而曲线为凸的, 即函数曲线的凸区间为 $(-\infty, \frac{1}{2})$;

$x > \frac{1}{2}$ 时, $y'' > 0$, 从而曲线为凹的, 即函数曲线的凹区间为 $(\frac{1}{2}, +\infty)$;

又因 $f(\frac{1}{2}) = \frac{15}{2}$, 故曲线的拐点为 $(\frac{1}{2}, \frac{15}{2})$.

18. 如图所示, 在 $x = a$ 处切线的斜率为 $y' \Big|_{x=a} = 2a$, 切线方程为 $y - a^2 = 2a(x - a)$,



即 $y = 2ax - a^2$,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{a^2} \left(\frac{y+a^2}{2a} - \sqrt{y} \right) dy \\ &= \frac{1}{2a} \left(\frac{y^2}{2} + a^2 y \right) \Big|_0^{a^2} - \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{a^2} \\ &= \frac{1}{12} a^3. \end{aligned}$$



绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试专升本高等数学(二)

全真模拟(四)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,满分150分,考试时间150分钟。

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第Ⅰ卷(选择题,共84分)

得分	评卷人

一、选择题(1~12小题,每小题7分,共84分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 函数 $y = |x| + 1$ 在 $x = 0$ 处 【 】

- A. 无定义 B. 不连续
C. 连续但是不可导 D. 可导

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 5x + 2}{x^2 - 2} =$ 【 】

- A. 0 B. 1
C. 2 D. 3

3. 若 $f(u)$ 可导,且 $y = f(e^x)$,则 $dy =$ 【 】

- A. $f'(e^x)dx$ B. $f'(e^x)e^x dx$
C. $f(e^x)e^x dx$ D. $f'(e^x)$

4. 设 $f'(\cos^2 x) = \sin^2 x$,且 $f(0) = 0$,则 $f(x)$ 等于 【 】

- A. $x + \frac{1}{2}x^2$ B. $x - \frac{1}{2}x^2$
C. $\sin^2 x$ D. $\cos x - \frac{1}{2}\cos^2 x$

5. 函数 $y = \ln(1 + x^2)$ 的单调增加区间是 【 】

- A. $(-\infty, +\infty)$ B. $(-\infty, 0)$
C. $(0, +\infty)$ D. 以上都不对

6. 不定积分 $\int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + 1 \right) d\sin x$ 等于 【 】

- A. $-\frac{1}{\sin x} + \sin x + C$ B. $\frac{1}{\sin x} + \sin x + C$
C. $-\cot x + \sin x + C$ D. $\cot x + \sin x + C$

7. $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sin t^2 dt =$ 【 】

- A. $2x \cos x^4$ B. $x^2 \cos x^4$
C. $2x \sin x^4$ D. $x^2 \sin x^4$

8. 函数 $f(x) = (x^2 - 1)^3 + 1$,在 $x = 1$ 处 【 】

- A. 有极大值 1 B. 有极小值 1
C. 有极小值 0 D. 无极值

9. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx =$ 【 】

- A. -1 B. 0
C. 1 D. 2

10. 曲线 $y = x^4 - 24x^2 + 6x$ 的凸区间为 【 】

- A. $(-2, 2)$ B. $(-\infty, 0)$
C. $(0, +\infty)$ D. $(-\infty, +\infty)$

11. 甲、乙两人独立地对同一目标射击一次,其命中率分别为 0.6 和 0.5,现已知目标被命中,是甲射中的概率为 【 】

- A. 0.6 B. 0.75
C. 0.85 D. 0.9

12. 曲线 $y = e^x$ 和直线 $y = 1, x = 1$ 围成的图形面积等于 【 】

- A. $2 - e$ B. $e - 2$
C. $e - 1$ D. $e + 1$

第Ⅱ卷(非选择题,共66分)

得分	评卷人

二、填空题(13~15小题,每小题7分,共21分)

13. $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 2\sqrt{3}x + 3}{x^2 - 3} =$ _____.

14. $\int_{-1}^1 \frac{x^2 \sin x}{1+x^2} dx =$ _____.

15. $\int x \sqrt{1-x^2} dx =$ _____.

得 分	评卷人

三、解答题(16~18 题,每小题 15 分,共 45 分. 解答应写出推理、演算步骤)

16. (本题满分 15 分)

设 $y = 2x^3 \arccos x + (x^2 - 2) \sqrt{1-x^2}$, 求 dy .

17. (本题满分 15 分)

设 f'' 存在, $z = \frac{1}{x}f(xy) + yf(x+y)$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

18. (本题满分 15 分)

求由方程 $2x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2x - 2y - 4z + 4 = 0$ 确定的隐函数的全微分.

参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了函数在一点可导、连续的性质的知识点.

【应试指导】 从四个选项的内容来看,我们可以一步一步地处理, $x=0$ 时, $y=1,\lim_{x\rightarrow 0}(|x|+1)=1$,故 $f(x)$ 在

$x=0$ 处连续. y 在 $x=0$ 的可导性可从左右导数出发进行讨论. $f'_{-}(0)=\lim_{\Delta x\rightarrow 0^{-}}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=$

$\lim_{\Delta x\rightarrow 0^{-}}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\rightarrow 0^{-}}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1,f'_{+}(0)=\lim_{\Delta x\rightarrow 0^{+}}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\rightarrow 0^{+}}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\rightarrow 0^{+}}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$,由于

$f'_{+}(0)\neq f'_{-}(0)$,所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导,故应选 C.

2.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了极限的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x\rightarrow 1}\frac{x^3-5x+2}{x^2-2}=\frac{1-5+2}{1-2}=2$.

3.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了复合函数的微分的知识点.

【应试指导】 因为 $y=f(e^x)$,所以, $dy=f'(e^x)e^xdx$.

4.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了已知导函数求原函数的知识点.

【应试指导】 因 $f'(\cos^2x)=\sin^2x=1-\cos^2x$,于是 $f'(x)=1-x$,两边积分得 $f(x)=x-\frac{1}{2}x^2+C$,又

$f(0)=0$,故 $f(x)=x-\frac{1}{2}x^2$.

5.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了函数单调性的知识点.

【应试指导】 因 $y'=[\ln(1+x^2)]'=\frac{2x}{1+x^2}$,只有当 $x\in(0,+\infty)$ 时, y 的一阶导数 $y'>0$,所以 y 在 $(0,+\infty)$

上单调增加.

6.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int(\frac{1}{\sin^2x}+1)dsinx=-\frac{1}{sinx}+sinx+C$,故选 A.

7.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了变上限积分求导的知识点.

【应试指导】 $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sin^2 t dt = \sin^2(x^2) \cdot (x^2)' = 2x \sin^2 x$.

8.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了函数的极值的知识点.

【应试指导】 $f(x) = (x^2 - 1)^3 + 1$, 则 $f'(x) = 6x(x^2 - 1)^2$, 令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$,

当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $x_3 = 1$ 处不取极值.

9.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了反常积分的知识点.

【应试指导】 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a \frac{1}{x^2} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^a = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{a} \right) = 1$.

10.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了导数应用的知识点.

【应试指导】 $y' = 4x^3 - 48x + 6, y'' = 12x^2 - 48$, 令 $y'' < 0$, 则有 $-2 < x < 2$, 故曲线的凸区间为 $(-2, 2)$.

11.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了条件概率的知识点.

【应试指导】 设 $A_1 = \{\text{甲射中目标}\}, A_2 = \{\text{乙射中目标}\}, B = \{\text{目标被命中}\}$. 由题意, $P(A_1) = 0.6, P(A_2) = 0.5$,

$B = A_1 \cup A_2, P(B) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2}) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) = 1 - (1 - 0.6)(1 - 0.5) = 0.8$; 故所求概率为

$P(A_1 | B) = \frac{P(A_1 B)}{P(B)} = \frac{P(A_1)}{P(B)} = \frac{0.6}{0.8} = 0.75$.

12.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了曲线围成的面积的知识点.

【应试指导】 由题意知, 所求面积 $A = \int_0^1 (e^x - 1) dx = e - 2$.

二、填空题

13.【答案】 0

【考情点拨】 本题考查了极限的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 2\sqrt{3}x + 3}{x^2 - 3} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{(x - \sqrt{3})^2}{(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x - \sqrt{3}}{x + \sqrt{3}} = 0$.

14.【答案】 0

【考情点拨】 本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】 因函数 $f(x) = \frac{x^2 \sin x}{1 + x^2}$ 在 $[-1, 1]$ 上是奇函数, 因此 $\int_{-1}^1 \frac{x^2 \sin x}{1 + x^2} dx = 0$.

注: 奇偶函数在对称区间上积分的性质是常考题目之一, 应注意.

15.【答案】 $-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的换元积分法的知识点.

【应试指导】 $\int x \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{1-x^2} dx^2 = \frac{1}{2} \int -(\sqrt{1-x^2}) d(1-x^2) = \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{2}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} +$

$C = -\frac{1}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$.

三、解答题

16. $dy = \left[6x^2 \arccos x + 2x^3 \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) + 2x\sqrt{1-x^2} + (x^2-2) \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \right] dx$

$= \left[6x^2 \arccos x - \frac{2x^3}{\sqrt{1-x^2}} + 2x\sqrt{1-x^2} - \frac{x(x^2-2)}{\sqrt{1-x^2}} \right] dx$

$= \left(6x^2 \arccos x - \frac{5x^3-4x}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$.

17. 由 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} f(xy) + \frac{1}{x} f'(xy) \cdot y + y f'(x+y)$,

则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{x^2} f'(xy) \cdot x + \frac{1}{x} [f''(xy) + y f''(xy) \cdot x] + f''(x+y) + y f''(x+y)$

$= y f''(xy) + f''(x+y) + y f''(x+y)$.

18. 等式两边对 x 求导, 将 y 看做常数, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{4x+2y-2}{4-2z} = \frac{2x+y-1}{2-z}$,

同理 $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y+2x-2}{4-2z} = \frac{x+y-1}{2-z}$,

所以 $dz = \frac{1}{2-z} [(2x+y-1)dx + (y+x-1)dy]$.



绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试专升本高等数学(二)

全真模拟(五)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,满分150分,考试时间150分钟。

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第Ⅰ卷(选择题,共84分)

得分	评卷人

一、选择题(1~12小题,每小题7分,共84分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 下列极限计算正确的是

A. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 0$

B. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$

C. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sin x} = 1$

D. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$

2. 下列极限等于1的是

A. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x}$

B. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}$

C. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{3x+5}$

D. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$

3. 函数 $y = ax^2 + c$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调增加,则 a, c 应满足

A. $a < 0$ 且 $c = 0$

B. $a > 0$ 且 c 是任意常数

C. $a < 0$ 且 $c \neq 0$

D. $a < 0$ 且 c 是任意常数

4. 设在 (a, b) 内有 $\int f'(x)dx = \int g'(x)dx$,则在 (a, b) 内必定有

A. $f(x) - g(x) = 0$

B. $f(x) - g(x) = C$

C. $df(x) \neq dg(x)$

D. $f(x)dx = g(x)dx$

5. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x\sqrt{x}}$,则 $f'(1) =$

A. $-\frac{1}{6}$

B. $\frac{5}{6}$

C. $-\frac{5}{6}$

D. $\frac{1}{6}$

6. 设 $z = (3x^2 + y^2)^{xy}$,则 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 等于

A. $xy \cdot (3x^2 + y^2)^{xy-1}$

B. $(3x^2 + y^2)^{xy} \cdot \ln(3x^2 + y^2)$

C. $y \cdot (3x^2 + y^2)^{xy} [(3x^2 + y^2) \ln(3x^2 + y^2) + 6x^2]$

D. $y \cdot (3x^2 + y^2)^{xy-1} [(3x^2 + y^2) \ln(3x^2 + y^2) + 6x^2]$

7. 下列反常积分发散的是

A. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$

B. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \cdot \ln^2 x} dx$

C. $\int_{-\infty}^0 e^x dx$

D. $\int_{-\infty}^0 e^{-x} dx$

8. 下列反常积分收敛的是

A. $\int_1^{+\infty} \cos x dx$

B. $\int_1^{+\infty} e^x dx$

C. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$

D. $\int_1^{+\infty} \ln x dx$

9. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} = 2$,则 $a =$

A. $\frac{1}{2}$

B. 1

C. $\frac{3}{2}$

D. 2

10. 设函数 $z = \ln xy + e^{x^2 y}$,则 $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(1,2)} =$

A. $\frac{1}{2} - 2e^2$

B. $\frac{1}{2} + e^2$

C. $1 + 2e^2$

D. $1 + e^2$

11. 设函数 $y = \sin(x^2 - 1)$,则 $dy =$

A. $\cos(x^2 - 1)dx$ B. $-\cos(x^2 - 1)dx$ C. $2x\cos(x^2 - 1)dx$ D. $-2x\cos(x^2 - 1)dx$

12. 甲、乙二人参加知识竞赛,共有6个选择题,8个判断题,甲、乙二人依次各抽一题,则甲抽到选择题,乙抽到判断题的概率为

A. $\frac{8}{91}$

B. $\frac{6}{91}$

C. $\frac{24}{91}$

D. $\frac{14}{91}$

第Ⅱ卷(非选择题,共66分)

得分	评卷人

二、填空题(13~15小题,每小题7分,共21分)

13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{3x} =$

14. $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2} dx =$

15. 设 $z = e^{xe^y}$,则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$

得 分	评卷人

三、解答题(16~18 题,每小题 15 分,共 45 分.解答应写出推理、演算步骤)

16. (本题满分 15 分)

求 $\int \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{2+3\tan x}} dx$.

17. (本题满分 15 分)

已知曲线 $y = ax^3 + bx^2 + cx$ 在点 $(1, 2)$ 处有水平切线,且原点为该曲线的拐点,求 a, b, c 的值,并写出此曲线的方程.

密 封 线 内 不 要 答 题

18. (本题满分 15 分)

证明: $2^x > x^2 (x > 4)$.

参考答案及解析

一、选择题

1. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了极限的知识点.

【应试指导】 对于选项 A: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \neq 0$, 错误; 对于选项 B: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$, 正确; 对于选项 C:

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sin x} = \infty \neq 1$, 错误; 对于选项 D: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \neq 1$, 错误.

2. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了极限的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x} = 0$ ($\arctan x$ 是有界函数), $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$ (用无穷小代换: $\arctan x \sim$

$x (x \rightarrow 0)$), $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{3x+5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{3+\frac{5}{x}} = \frac{2}{3}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ ($x \rightarrow \infty$ 时 $\frac{1}{x}$ 为无穷小量, 而 $\sin x$ 是有界函数, 注

意 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$).

3. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了函数的单调增加性的知识点.

【应试指导】 由 $y' = 2ax$, 若 y 在 $(0, +\infty)$ 上单调增加, 则应有 $y' > 0$, 即 $a > 0$, 且对 c 没有其他要求, 故选 B.

4. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 由 $\int f'(x) dx = \int g'(x) dx$, 得 $\int [f'(x) - g'(x)] dx = 0$, 即 $f'(x) - g'(x) = 0$, 又 $\int [f'(x) - g'(x)] dx = \int 0 dx = 0$, 故 $f(x) - g(x) - C = 0$, 所以 $f(x) - g(x) = C$.

5. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了一元函数的一阶导数的知识点.

【应试指导】 因 $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x\sqrt{x}} = x^{-\frac{2}{3}} - x^{-\frac{3}{2}}$, 所以 $f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}} + \frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$, 故 $f'(1) = -\frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{5}{6}$.

6. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了二元函数的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】 因 $z = (3x^2 + y^2)^{xy}$ 可看作是 $z = u^v$, $u = 3x^2 + y^2$, $v = xy$ 复合而成, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} =$
 $v \cdot u^{v-1} \cdot 6x + u^v \cdot \ln u \cdot y = xy \cdot (3x^2 + y^2)^{xy-1} \cdot 6x + (3x^2 + y^2)^{xy} \cdot \ln(3x^2 + y^2) \cdot y = y \cdot (3x^2 + y^2)^{xy-1} \cdot$
 $[(3x^2 + y^2) \ln(3x^2 + y^2) + 6x^2].$

7.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了无穷区间反常积分的敛散性的知识点.

【应试指导】 对于选项 A: $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{2}$, 此积分收敛; 对于选项 B: $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx = -\frac{1}{\ln x} \Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{\ln 2}$,

此积分收敛; 对于选项 C: $\int_{-\infty}^0 e^x dx = e^x \Big|_{-\infty}^0 = 1$, 此积分收敛; 对于选项 D: $\int_{-\infty}^0 e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_{-\infty}^0 = -1 +$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x}$, 该极限不存在, 故此积分发散.

8.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了无穷区间的反常积分的敛散性的知识点.

【应试指导】 对于选项 A: $\int_1^{+\infty} \cos x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \cos x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\sin b - \sin 1)$ 不存在, 此积分发散; 对于选项 B:

$\int_1^{+\infty} e^x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b e^x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (e^b - e)$ 不存在, 此积分发散; 对于选项 C: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{2x^2} \Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{2}$, 此积分收敛;

对于选项 D: $\int_1^{+\infty} \ln x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \ln x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[(x \ln x) - x \Big|_1^b \right] = \lim_{b \rightarrow +\infty} (b \ln b - b + 1)$ 不存在, 此积分发散.

9.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了特殊极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 的应用的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} = a \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = a = 2$.

10.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了二元函数的一点处的一阶偏导数的知识点.

【应试指导】 由 $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{xy} \cdot x + e^{x^2 y} \cdot x^2$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(1,2)} = \frac{1}{2} + e^2$.

注: 也可先将 $x = 1$ 代入, 则 $z \Big|_{(1,y)} = \ln y + e^y$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y} + e^y$, 所以 $\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(1,2)} = \frac{1}{2} + e^2$.

11.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了函数微分的知识点.

【应试指导】 根据复合函数求导法则, $y' = 2x \cos(x^2 - 1)$, 故 $dy = 2x \cos(x^2 - 1) dx$.

12.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了随机事件的概率的知识点.

【应试指导】 注意甲抽完之后只有 13 道题, 所求概率 $= \frac{6}{14} \times \frac{8}{13} = \frac{24}{91}$.

二、填空题

13.【答案】 e^{-6}

【考情点拨】 本题考查了 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 的应用的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-\frac{x}{2}}\right)^{-\frac{x}{2} \cdot (-6)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-\frac{x}{2}}\right)^{-\frac{x}{2}}\right]^{-6} = e^{-6}$.

14.【答案】 $\frac{1}{2}$

【考情点拨】 本题考查了无穷区间的反常积分的知识点.

【应试指导】 $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \int_0^a \frac{1}{(1+x^2)^2} d(x^2 + 1) = \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{1+x^2}\right) \Big|_0^a =$

$\frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{1+a^2}\right) = \frac{1}{2}$.

注: 根据本题结构特点, 容易想到凑微分, $2x dx = dx^2 = d(x^2 + 1)$.

15.【答案】 $(1 + xe^y)e^{y+xe^y}$

【考情点拨】 本题考查了二元函数的混合偏导数的知识点.

【应试指导】 因 $z = e^{xe^y}$, 于是 $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{xe^y} \cdot e^y$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{xe^y} \cdot xe^y \cdot e^y + e^{xe^y} \cdot e^y = (1 + xe^y)e^{y+xe^y}$.

三、解答题

16. 因 $\frac{1}{\cos^2 x} dx = \sec^2 x dx = d \tan x$,

所以 $\int \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{2+3 \tan x}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{2+3 \tan x}} d \tan x$
 $= \frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{2+3 \tan x}} d(2+3 \tan x)$
 $= \frac{2}{3} \sqrt{2+3 \tan x} + C$.

17. $y = ax^3 + bx^2 + cx$, $y' = 3ax^2 + 2bx + c$, $y'' = 6ax + 2b$,

由已知条件得

$2 = a + b + c$, (曲线过 (1, 2) 点)

$3a + 2b + c = 0$, (在 (1, 2) 点 $y' = 0$)

$2b = 0$, (原点为拐点)

故 $b = 0$, $a = -1$, $c = 3$, 此曲线的方程为 $y = -x^3 + 3x$.

18. 令 $f(x) = 2^x - x^2 (x > 4)$, 则 $f'(x) = 2^x \ln 2 - 2x$, 由于此式不便判定符号, 故再求出 $f''(x)$.

又因 $f''(x) = 2^x \ln^2 2 - 2 > 2^4 \ln^2 2 - 2 = 2(2 \ln 4 \cdot \ln 4 - 1) > 0$, 所以 $f'(x)$ 单调增加, 故 $f'(x) > f'(4) =$

$2^4 \ln 2 - 8 = 8(2 \ln 2 - 1) = 8(\ln 4 - 1) > 0$,

得到 $f(x)$ 单调增加, 故 $f(x) > f(4)$, 即 $2^x - x^2 > f(4) = 2^4 - 4^2 = 0$,

因此 $2^x > x^2 (x > 4)$.



绝密★启用前

全国各类成人高等学校招生考试专升本高等数学(二)

全真模拟(六)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,满分150分,考试时间150分钟.

题号	一	二	三	总分	统分人签字
分数					

第Ⅰ卷(选择题,共84分)

得分	评卷人

一、选择题(1~12小题,每小题7分,共84分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

- 曲线 $y = x^3 - 3x$ 上切线平行于 x 轴的点是 【 】
 - $(0,0)$
 - $(1,2)$
 - $(-1,2)$
 - $(-1,-2)$
- 当 $x \rightarrow 0$ 时,无穷小量 $x + \sin x$ 是比 x 的 【 】
 - 高阶无穷小
 - 低阶无穷小
 - 同阶但非等价无穷小
 - 等价无穷小
- 称 e^{-x} 是无穷小量是指在下列哪一过程中它是无穷小量 【 】
 - $x \rightarrow 0$
 - $x \rightarrow \infty$
 - $x \rightarrow +\infty$
 - $x \rightarrow -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x}{x} =$ 【 】
 - 0
 - 1
 - $\frac{1}{2}$
 - 2
- 曲线 $y = x^4 - 3$ 在点 $(1, -2)$ 处的切线方程为 【 】
 - $2x - y - 6 = 0$
 - $4x - y - 6 = 0$
 - $4x - y - 2 = 0$
 - $2x - y - 4 = 0$
- $\frac{d}{dx} \int \frac{1}{1+x^2} dx =$ 【 】
 - $\arctan x$
 - $\operatorname{arccot} x$
 - $\frac{1}{1+x^2}$
 - 0

7. $\int_0^1 (5x^4 + 2) dx =$ 【 】

- 1
- 3
- 5
- 7

8. 积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx$ 等于 【 】

- 1
- 0
- 1
- 2

9. 当 $x \rightarrow 1$ 时, $\frac{1-x}{1+x}$ 是 $1 - \sqrt{x}$ 的 【 】

- 高阶无穷小
- 低阶无穷小
- 等价无穷小
- 不可比较

10. 对于函数 $z = xy$, 原点 $(0,0)$ 【 】

- 不是函数的驻点
- 是驻点不是极值点
- 是驻点也是极值点
- 无法判定是否为极值点

11. 某建筑物按设计要求使用寿命超过50年的概率为0.8,超过60年的概率为0.6,该建筑物经历了50年后,它将在10年内倒塌的概率等于 【 】

- 0.25
- 0.30
- 0.35
- 0.40

12. 设 $z = x^3 e^{y^2}$, 则 dz 等于 【 】

- $6x^2 y e^{y^2} dx dy$
- $x^2 e^{y^2} (3dx + 2xy dy)$
- $3x^2 e^{y^2} dx$
- $x^3 e^{y^2} dy$

第Ⅱ卷(非选择题,共66分)

得分	评卷人

二、填空题(13~15小题,每小题7分,共21分)

13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos^2 t dt}{x} =$ _____.

14. $\int_0^2 |x-1| dx =$ _____.

15. 若 $z = \ln(x + e^y)$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ _____.

得 分	评卷人

三、解答题(16~18 题,每小题 15 分,共 45 分.解答应写出推理、演算步骤)

16. (本题满分 15 分)

计算 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

17. (本题满分 15 分)

确定函数 $y = 2x^4 - 12x^2$ 的单调区间、极值及函数曲线的凸凹性区间和拐点.

密
封
线
内
不
要
答
题

18. (本题满分 15 分)

设函数 $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + 3$, 求 $f(x, y)$ 的极值点与极值.

参考答案及解析

一、选择题

1. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了曲线上一点处的切线的知识点.

【应试指导】 由 $y = x^3 - 3x$ 得 $y' = 3x^2 - 3$, 令 $y' = 0$, 得 $x = \pm 1$. 经计算 $x = -1$ 时, $y = 2$; $x = 1$ 时, $y = -2$, 故选 C.

2. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了无穷小量的知识点.

【应试指导】 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right) = 2$, 所以 $x \rightarrow 0$ 时, $x + \sin x$ 与 x 是同阶但非等价无穷小.

3. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了无穷小量的知识点.

【应试指导】 因 $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$, 故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}$ 不存在, 应选 C.

4. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了无穷小量的性质的知识点.

【应试指导】 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\sin 2x$ 是有界变量, 故 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \sin 2x \right) = 0$.

5. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了曲线上一点处的切线方程的知识点.

【应试指导】 因 $y = x^4 - 3$, 所以 $y' = 4x^3$, 于是曲线在点 $(1, -2)$ 处的切线的斜率 $k = y' \Big|_{x=1} = 4$, 从而得切线方程: $y + 2 = 4(x - 1)$, 即 $4x - y - 6 = 0$.

6. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了不定积分的性质的知识点.

【应试指导】 $\frac{d}{dx} \int \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{1+x^2}$.

7. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】 $\int_0^1 (5x^4 + 2) dx = \int_0^1 5x^4 dx + \int_0^1 2 dx = x^5 \Big|_0^1 + 2x \Big|_0^1 = 1 + 2 = 3$.

8. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】 解法 1:

因 $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ 为奇函数, 故由积分性质知, $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx = 0$.

解法 2:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cos x} d(1 + \cos x) = - \ln(1 + \cos x) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

9.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了无穷小量阶的比较的知识点.

【应试指导】 由 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1+\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+\sqrt{x}}{1+x} = 1$, 所以当 $x \rightarrow 1$ 时, $\frac{1-x}{1+\sqrt{x}}$ 与 $1-\sqrt{x}$ 是等价无穷小.

10.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了函数的驻点、极值点的知识点.

【应试指导】 因 $z = xy$, 于是 $\frac{\partial z}{\partial x} = y, \frac{\partial z}{\partial y} = x$; 令 $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, 且 $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, 得驻点 $(0, 0)$; 又 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, 从而 $B^2 - AC = 1 > 0$, 故点 $(0, 0)$ 不是极值点.

11.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了条件概率的知识点.

【应试指导】 设 $A = \{\text{该建筑物使用寿命超过 50 年}\}, B = \{\text{该建筑物使用寿命超过 60 年}\}$, 由题意, $P(A) = 0.8, P(B) = 0.6$, 所求概率为: $P(\bar{B} | A) = 1 - P(B | A) = 1 - \frac{P(AB)}{P(A)} = 1 - \frac{P(B)}{P(A)} = 1 - \frac{0.6}{0.8} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$.

12.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了二元函数的全微分的知识点.

【应试指导】 因 $z = x^3 e^{y^2}$, 于是 $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 e^{y^2}, \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3 y e^{y^2}$, 故 $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 3x^2 e^{y^2} dx + 2x^3 y e^{y^2} dy = x^2 e^{y^2} (3dx + 2xydy)$.

二、填空题

13.【答案】 1

【考情点拨】 本题考查了洛必达法则的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos^2 t dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x}{1} = 1$.

14.【答案】 1

【考情点拨】 本题考查了定积分的知识点.

【应试指导】 $\int_0^2 |x-1| dx = \int_0^1 (1-x) dx + \int_1^2 (x-1) dx = 1 - \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} x^2 \Big|_1^2 - 1 = 1$.

注: 绝对值函数的积分必须分段进行.

15.【答案】 $-\frac{e^y}{(x+e^y)^2}$

【考情点拨】 本题考查了二元函数的混合偏导数的知识点.

【应试指导】 因 $z = \ln(x + e^y)$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x+e^y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{-e^y}{(x+e^y)^2}$.

三、解答题

$$\begin{aligned} 16. \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (\text{被积函数为偶函数}) \\ &= -2 \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x d\sqrt{1-x^2} \\ &= -2 \left(\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} + 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} d\arcsin x \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{6} \pi + 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{6} \pi + 1 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{6} \pi. \end{aligned}$$

$$17. y' = 8x^3 - 24x, y'' = 24x^2 - 24, \text{令 } y' = 0, \text{得 } x = \pm\sqrt{3} \text{ 或 } x = 0.$$

令 $y'' = 0$, 得 $x = \pm 1$; $x < -\sqrt{3}$ 时, $y' < 0$; $-\sqrt{3} < x < 0$ 时, $y' > 0$;

$0 < x < \sqrt{3}$ 时, $y' < 0$; $x > \sqrt{3}$ 时, $y' > 0$.

于是, 函数的递增区间为 $(-\sqrt{3}, 0)$ 和 $(\sqrt{3}, +\infty)$; 递减区间为 $(-\infty, -\sqrt{3})$ 和 $(0, \sqrt{3})$; 有极小值 $f(\pm\sqrt{3}) = -18$, 有极大值 $f(0) = 0$.

又因当 $-\infty < x < -1$ 时, $y'' > 0$, 则 y 为凹函数;

当 $-1 < x < 1$ 时, $y'' < 0$, 则 y 为凸函数;

当 $1 < x < +\infty$ 时, $y'' > 0$, 则 y 为凹函数.

综上得函数 y 的凹区间为 $(-\infty, -1)$ 和 $(1, +\infty)$, 凸区间为 $(-1, 1)$, 且拐点为 $(-1, -10)$ 和 $(1, -10)$.

$$18. \text{由已知, } \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y, \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + x.$$

$$\text{令 } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \end{cases} \text{ 得驻点 } (0, 0).$$

$f(x, y)$ 的 2 阶偏导数为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2.$$

$$\text{故 } A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{(0,0)} = 2, B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(0,0)} = 1, C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{(0,0)} = 2.$$

因为 $A > 0$ 且 $AC - B^2 > 0$, 所以 $(0, 0)$ 为 $f(x, y)$ 的极小值点, 极小值为 $f(0, 0) = 3$.